

離散数学 ⑧

徳久雅人

集合論 (順序関係・同値関係)

<http://unicorn.ike.tottori-u.ac.jp/tokuhisa/>
<https://sslvpn.tottori-u.ac.jp/>

2012.6/4 2012.6/9 訂正あり

離散数学の教育目標

- 記号論理 } 条件を書く
推論する
- 集合論 データを書く, 計算する
- グラフ理論 データの構造を書く, 計算する

(シラバス) 15週の計画

- 1～4週: 記号論理
- 5～9週: 集合論
- 10～14週: グラフ理論
- 15週: 補足

レポート課題

- 先週の小テストの誤り修正
(締め切り**延長!**)6月11日

復習

- 2項関係 = 2つのモノの間
 - モノの集合 X
 - 間の集合 R
- R は X の間の2項関係である
 - $\Leftrightarrow R \subseteq X^2$
 - $\Leftrightarrow (a, b) \in R$
 - $\Leftrightarrow a R b$

今日のゴール

- 2項関係の性質
- 同値関係
- 順序関係

8.1 2項関係の性質

2項関係 $R \subseteq X^2$

1. 反射性 $\forall x \in X (x R x)$
2. 対称性 $x R y \rightarrow y R x$
3. 反・対称性 ... $x R y \wedge y R x \rightarrow x = y$
4. 推移性 $x R y \wedge y R z \rightarrow x R z$
5. 比較可能性 .. $\forall x, y \in X (x R y \vee y R x)$

例) 2人ジャンケン 勝ち関係 W は?

- $W = \{ (g, c), (c, p), (p, g) \}$
 - 反射性 無し
 - 対称性 無し
 - 反・対称性 有り
 - 推移性 無し
 - 比較可能性 無し

例題1

2人ジャンケンのアイコの関
係 E の性質を調べなさい:

$E = \{ (グー, グー),$
 $(チョキ, チョキ), (パー, パー) \}$

答え

- 反射性 有り
- 対称性 有り
- 反・対称性 有り
- 推移性 有り
- 比較可能性 無し

8.2 同値関係

- 反射性, 対称性, 推移性を満たす2項関係 $R \subseteq X^2$
- $a \sim_R b$
... a と b は R の意味で同値
- $[x]_R = \{ y \mid x, y \in X, y \sim_R x \}$
... x と R の意味で同値なものの集合 (同値類)
- $X/R = \{ [x]_R \mid x \in X \}$
... 同値類の集合

例題2

以下の際, $R, [dog]_R, X/R$ を具
体的に示せ:

$X = \{ dog, cat, horse, snake, lizard,$
 $crane, swallow \}$

$R = \{ (a, b) \in X^2 \mid a$ と b は哺乳類 \vee
 a と b は爬虫類 $\vee a$ と b は鳥類 $\}$

答え

- $R = \{(dog, dog), (dog, cat), (dog, horse), (cat, dog), (cat, cat), (cat, horse), (horse, dog), (horse, cat), (horse, horse), (snake, snake), (snake, lizard), (lizard, snake), (lizard, lizard), (crane, crane), (crane, swallow), (swallow, crane), (swallow, swallow)\}$
- $[dog]_R = \{dog, cat, horse\}$
- $X/R = \{\{dog, cat, horse\}, \{snake, lizard\}, \{crane, swallow\}\}$

8.3 順序関係

- 反射性, 反・対称性, 推移性を満たす2項関係 $R \subseteq X^2$
 - 全順序関係: 比較可能性を満たす順序関係
 - 半順序関係: 比較可能性を満たさない順序関係
- $a \leq_R b$
... b は a より R の意味で大きい
- 順序集合 (X, R)
... $R \subseteq X^2$ かつ P は順序関係

ハッセ図



- 順序関係を表す図
- 登り一方通行で, 迎れる2つの間には関係あり
- 自身への関係はあり

この図では半順序関係
 $X = \{\text{社長, 部長1, 部長2, 社員1, 社員2, 見習い}\}$

- $$R = \{(\text{社長, 社長}), (\text{部長1, 社長}), (\text{部長2, 社長}), (\text{社員1, 社長}), (\text{社員2, 社長}), (\text{見習い, 社長}), (\text{部長1, 部長1}), (\text{社員1, 部長1}), (\text{社員2, 部長1}), (\text{見習い, 部長1}), (\text{部長2, 部長2}), (\text{社員1, 部長2}), (\text{社員2, 部長2}), (\text{見習い, 部長2}), (\text{社員1, 社員1}), (\text{見習い, 社員1}), (\text{社員2, 社員2}), (\text{見習い, 社員2})\}$$

補足資料の訂正

- トーナメント試合での勝ち負けの関係は半順序関係 (表現が不正確)
- トーナメント試合で判明する強さ(より強い, または, 等しい)の関係は半順序関係

例題3

- 先のハッセ図において, 部長1, 社員1, 社員2による委員会が結成されたとする. この3人を要素とする集合を U とする.
 1. U を具体的に示せ.
 2. X の要素のうち, U のいかなる要素よりも R の意味で大きいものを全て示せ. つまり

$$\{x \in X \mid y \in U, y \leq_R x\}$$

答え

1. $U = \{\text{部長1}, \text{社員1}, \text{社員2}\}$
2. $\{\text{社長}, \text{部長1}\}$



(訂正) 部長1も含まれます (2012.6/9)