離散数学 ④

徳久雅人

記号論理
（述語論理の標準形）

2012.5/9

今日のゴール

- 述語論理式の標準形
  - 閉形
  - 冠頭標準形
  - Skolem標準形
- 楽しい記号論理
  - 推論のさわり

閉形

- 全称閉形

  $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n\ P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
- 存在閉形

  $\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n\ P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

※ $P(\cdot)$は命題関数

冠頭標準形

- 冠頭連言標準形

  $Qx_1 Qx_2 \ldots Qx_n\ C$

  C は限定作用素を含まない連言標準形
- 冠頭選言標準形

  $Qx_1 Qx_2 \ldots Qx_n\ D$

  Dは限定作用素を含まない選言標準形

Qは限定作用素. ∃, ∀の混在は可能

冠頭標準形への変形

資料参照

やってみよう

冠頭標準形にせよ

$\forall y(\exists x P(x, y) \rightarrow \exists z Q(y, z))$

答え

$$\forall y(\exists x P(x, y) \rightarrow \exists z Q(y, z))$$
$$\Leftrightarrow \forall y(\neg \exists x P(x, y) \vee \exists z Q(y, z))$$
$$\Leftrightarrow \forall y(\forall x \neg P(x, y) \vee \exists z Q(y, z))$$
$$\Leftrightarrow \forall y \forall x(\neg P(x, y) \vee \exists z Q(y, z))$$
$$\Leftrightarrow \forall y \forall x \exists z\ (\neg P(x, y) \vee Q(y, z))$$

Skolem標準形

- 存在記号が無い
- 冠頭連言標準形

Q. どうやって存在記号を
　取り除くのか？

A. Skolem関数，定数を使う

ジャンケンの例1

$W(x, y)$ = “ジャンケンで x が y に勝つ”

$\forall x \exists y W(x, y)$

- どんな手 x が出されても，**それに応じて手 y を出せ**ば，W は成り立つ.
- 負け手を算出する関数に置き換える.

$$y = f(x)$$

$\forall x W(x, f(x))$

こんな都合の良い関数を，
誰かが作ってくれていると考える！
Skolem関数という.

ジャンケンの例2

$W(x, y)$ = “ジャンケンで x が y に勝つ”

$\exists x \exists y W(x, y)$

- xは適当に決めるので，定数
- yも適当に決めるので定数

$W(a, b)$

ジャンケンの例3

$W(x, y)$ = “ジャンケンで x が y に勝つ”

$\exists x \forall y W(x, y)$

- xは先に適当に決めるので，定数

$\forall y W(a, y)$

先に手 a が決まっている.
そんなところで，すべての y に勝てる訳が無い.

→ Skolem標準形で書くと分かりやすい.

Skolem関数の単純化

問．Skolem標準形にせよ

$$\forall x \forall y \{\exists z W(x, z) \wedge \exists u W(y, u)\}$$

答1

$$\forall x \forall y \{W(x, f(x,y)) \wedge W(y, g(x,y))\}$$

答2

$$\forall x \forall y \{W(x, f(x)) \wedge W(y, g(y))\}$$

楽しい記号論理～推論

- 同値変形と推論

P が真，かつ，$P \to Q$ が真

そのとき

Q も真

である．

論理式で書くと

この2つが真であるとする

$$P \wedge (P \to Q)$$
$$\Leftrightarrow P \wedge (\neg P \vee Q)$$
$$\Leftrightarrow (P \wedge \neg P) \vee (P \wedge Q)$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{F} \vee (P \wedge Q)$$
$$\Leftrightarrow P \wedge Q$$

これも真であることが分かった！

論理式で書くと

ベキ等律によりコピー

$$P \wedge (P \to Q)$$
$$\Leftrightarrow P \wedge (P \to Q) \wedge (P \to Q)$$
$$\Leftrightarrow \{\, P \wedge (\neg P \vee Q) \,\} \wedge (P \to Q)$$
$$\Leftrightarrow \{(P \wedge \neg P) \vee (P \wedge Q) \,\} \wedge (P \to Q)$$
$$\Leftrightarrow \{\, \mathrm{F} \vee (P \wedge Q) \,\} \wedge (P \to Q)$$
$$\Leftrightarrow P \wedge Q \wedge (P \to Q)$$

$P \to Q$ が消えたわけではない

例題1

- 父と娘の会話：
  - 父：「草刈りをしたら小遣いをあげるよ」

（翌日）

  - 娘：「草刈りが済んだよ」

（娘は小遣いがもらえるか？）

- 回答：

P = “草刈りをする” Q = “小遣いを得る”

$P \to Q$ = “草刈りをすると，小遣いを得る”

とするとき，P と $P \to Q$ が真である．

$P \wedge (P \to Q) \Leftrightarrow P \wedge Q$ より Q が新たに真であると分かる．

∴ 娘は小遣いをもらった

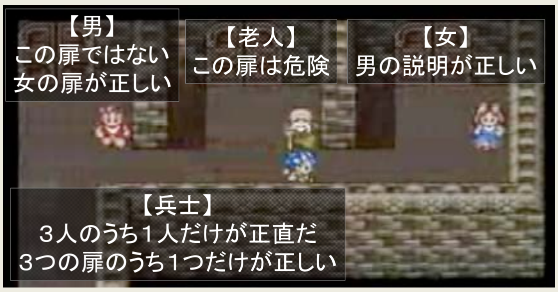
待遇をとると

$$P \to Q \Leftrightarrow \neg Q \to \neg P$$

であるので

$$\neg Q \wedge (P \to Q)$$
$$\Leftrightarrow \neg Q \wedge \neg P$$

（問題）試練の塔



（正直者は誰？）（正しい扉はどれ？）

ヒント1

L = "左の扉が正しい"
C = "真ん中の扉が正しい"
R = "右の扉が正しい"
B = "男が正直"
O = "老人が正直"
G = "女が正直"

ヒント2

- 一人だけ正直なので…

$$\begin{aligned}&(B\wedge\neg O\wedge\neg G)\\ \vee&(\neg B\wedge O\wedge\neg G)\\ \vee&(\neg B\wedge\neg O\wedge G)\end{aligned}$$

- 1つの扉だけ正しいので…

$$\begin{aligned}&(L\wedge\neg C\wedge\neg R)\\ \vee&(\neg L\wedge C\wedge\neg R)\\ \vee&(\neg L\wedge\neg C\wedge R)\end{aligned}$$

ヒント3

- 男の証言によると:

$$\begin{array}{llll} B\to\neg L & \neg B\to L & \multirow{2}{*}{$\Leftrightarrow$} & B\leftrightarrow\neg L \\ B\to R & \neg B\to\neg R & & B\leftrightarrow R \end{array}$$

- 老人の証言によると:

$$O\to\neg C \qquad \neg O\to C \qquad \Leftrightarrow \qquad O\leftrightarrow\neg C$$

- 女の証言によると:

$$G\to B \qquad \neg G\to\neg B \qquad \Leftrightarrow \qquad G\leftrightarrow B$$

正面突破～6つの事実の同値変形～

$$\begin{aligned}&\{(B\wedge\neg O\wedge\neg G)\vee(\neg B\wedge O\wedge\neg G)\vee(\neg B\wedge\neg O\wedge G)\}\\ \wedge&\{(L\wedge\neg C\wedge\neg R)\vee(\neg L\wedge C\wedge\neg R)\vee(\neg L\wedge\neg C\wedge R)\}\\ \wedge&(B\leftrightarrow\neg L)\\ \wedge&(B\leftrightarrow R)\\ \wedge&(O\leftrightarrow\neg C)\\ \wedge&(G\leftrightarrow B)\\ \Leftrightarrow&\ ---\ ???\ ---\end{aligned}$$

ヒント4

- 部分的に簡単化を進める

$$\begin{aligned}&\{(B\wedge\neg O\wedge\neg G)\vee(\neg B\wedge O\wedge\neg G)\vee(\neg B\wedge\neg O\wedge G)\}\wedge\\ &\quad(G\leftrightarrow B)\wedge\ldots\\ \Leftrightarrow&\{(B\wedge\neg O\wedge\neg G)\wedge(G\leftrightarrow B)\\ &\quad\vee(\neg B\wedge O\wedge\neg G)\wedge(G\leftrightarrow B)\\ &\quad\vee(\neg B\wedge\neg O\wedge G)\wedge(G\leftrightarrow B)\}\wedge\ldots\\ \Leftrightarrow&\{B\wedge\neg O\wedge\neg G\wedge(G\to B)\wedge(B\to G)\\ &\quad\vee\neg B\wedge O\wedge\neg G\wedge(G\to B)\wedge(B\to G)\\ &\quad\vee\neg B\wedge\neg O\wedge G\wedge(G\to B)\wedge(B\to G)\}\wedge\ldots\end{aligned}$$

つづき

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow&[\{B\wedge\neg O\wedge\neg G\wedge(G\to B)\wedge(B\to G)\}\\ &\quad\vee\{\neg B\wedge O\wedge\neg G\wedge(G\to B)\wedge(B\to G)\}\\ &\quad\vee\{\neg B\wedge\neg O\wedge G\wedge(G\to B)\wedge(B\to G)\}]\wedge\ldots\\ \Leftrightarrow&[\{B\wedge\neg O\wedge\neg G\wedge(G\to B)\wedge\neg B\}\ \leftarrow B\text{ と}\neg B\text{ があるので}F\\ &\quad\vee\{\neg B\wedge O\wedge\neg G\wedge\neg G\wedge\neg B\}\ \leftarrow\text{ここだけ矛盾しない}\\ &\quad\vee\{\neg B\wedge\neg O\wedge G\wedge\neg G\wedge(B\to G)\}]\wedge\ldots\\ \Leftrightarrow&\{\neg B\wedge O\wedge\neg G\}\wedge\ldots\end{aligned}$$

のこりも同様にがんばる！！！