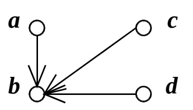
離散数学･演習問題　　学籍番号:　　　　氏名:　　　　得点:

問 1. グラフの記述

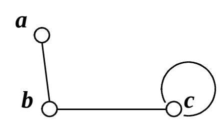
(1) 次の図のグラフを，集合の形式で記述せよ．なお，無向辺は 2 つ組で記述すること．

(a) $\boldsymbol{G}_1$ =　　　　(b) $\boldsymbol{G}_2$ =

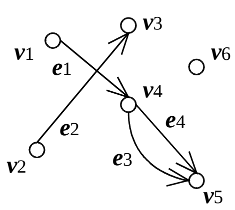
(c) $\boldsymbol{G}_3$ =　　　　(d) $\boldsymbol{G}_4$ =



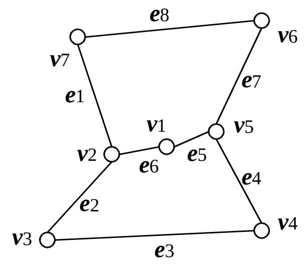
(a) グラフ $\boldsymbol{G}_1$



(b) グラフ $\boldsymbol{G}_2$



(c) グラフ $\boldsymbol{G}_3$



(d) グラフ $\boldsymbol{G}_4$

図 1 問 1 のグラフ

(2) 図 1 の $\boldsymbol{G}_3$ の辺についての始点を表す関数 ∂^+の関数表を示せ．

(3) 図 1 の $\boldsymbol{G}_4$ の辺についての端点を表す関数を ∂ とする．以下を求めよ．

(3-1) $\partial(\boldsymbol{e}_1)$ =　　　　(3-2) $\partial(\boldsymbol{e}_5)$ =

(3-3) $\partial(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4)$　のとき $\boldsymbol{x}$ =

(4) 図 1 の $\boldsymbol{G}_1$ から $\boldsymbol{G}_4$ について以下の計算をせよ．

(4-1) $|\ \boldsymbol{V}(\boldsymbol{G}_1)\ |$ =　　　　(4-2) $\mathbf{deg}^-_{G1}(\boldsymbol{b})$ =

$\mathbf{deg}^+_{G1}(\boldsymbol{b})$ =

(4-3) $\mathbf{deg}_{G2}(\boldsymbol{c})$ =　　　　(4-4) $\sum_{\boldsymbol{v}\in \boldsymbol{V}(\boldsymbol{G}_2)} \mathbf{deg}_{G2}(\boldsymbol{v})$ =

(4-5) $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{G})$ はグラフ $\boldsymbol{G}$ の標識集合を表す．以下を計算せよ．

$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{G}_3) \cap (\ \{\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_5\} \times \{\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_5, \boldsymbol{v}_6\} \times \boldsymbol{C}(\boldsymbol{G}_3)\ )$

=

(4-6) $\sum_{\boldsymbol{v}\in\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_5, \boldsymbol{v}_7\}} \mathbf{deg}_{G4}(\boldsymbol{v})$ =

(4-7) $\boldsymbol{A} = \{\ \boldsymbol{v} \mid \mathbf{deg}_{G4}(\boldsymbol{v}) = 2\boldsymbol{n}, \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}\ \}$, $\boldsymbol{B} = \{\ \boldsymbol{v} \mid \mathbf{deg}_{G4}(\boldsymbol{v}) = 2\boldsymbol{n} + 1, \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}\ \}$ とする．
ここで，$\boldsymbol{Z}$ は整数の集合である．集合 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ を具体的に示せ．

$\boldsymbol{A}$ = {

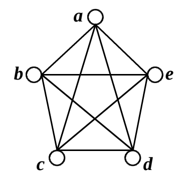
$\boldsymbol{B}$ = {

問 2. いろいろなグラフ

(1) 下記のグラフの種類名を次の選択肢(a)～(e)で答えよ．ただし，各選択肢は 1 回だけ使うことにする．

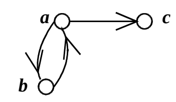
選択肢 (a) 有向グラフ (b) 無向グラフ (c) 標識付きグラフ
(d) 多重グラフ (e) 完全グラフ

(1-1)



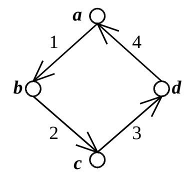
答

(1-2)



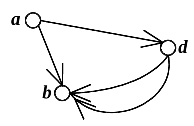
答

(1-3)



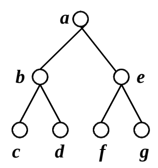
答

(1-4)



答

(1-5)



答

(2) グラフの演算をせよ．

(2-1) $\boldsymbol{G}_1 = (\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{E}_1)$, $\boldsymbol{V}_1 = \{\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}\ \}$, $\boldsymbol{E}_1 = \{\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}), (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}), (\boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}), (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{a})\ \}$,
$\boldsymbol{G}_2 = (\boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{E}_2)$, $\boldsymbol{V}_2 = \{\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}\ \}$, $\boldsymbol{E}_2 = \{\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), (\boldsymbol{d}, \boldsymbol{b}), (\boldsymbol{d}, \boldsymbol{a}), (\boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}), (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})\ \}$ とする．$\boldsymbol{G}_1 \cap \boldsymbol{G}_2 = \boldsymbol{G}_3$ とするとき，$\boldsymbol{G}_3$ の頂点集合および辺集合を述べよ．

$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{G}_3)$ = {

$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{G}_3)$ = {

(2-2) $\boldsymbol{G}_1 = (\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{E}_1)$, $\boldsymbol{V}_1 = \{\ \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{f}\ \}$, $\boldsymbol{E}_1 = \{\ (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}), (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{f}), (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}), (\boldsymbol{d}, \boldsymbol{f}), (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})\ \}$,
$\boldsymbol{G}_2 = (\boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{E}_2)$, $\boldsymbol{V}_2 = \{\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}\ \}$, $\boldsymbol{E}_2 = \{\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{a}), (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}), (\boldsymbol{g}, \boldsymbol{d}), (\boldsymbol{g}, \boldsymbol{e})\ \}$ とする．$\boldsymbol{G}_1 \cup \boldsymbol{G}_2 = \boldsymbol{G}_3$ とするとき，$\boldsymbol{G}_3$ の頂点集合および辺集合を述べよ．

$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{G}_3)$ = {

$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{G}_3)$ = {

(2-3) 無向グラフ $\boldsymbol{G}_1$ を次のように定義する．$\boldsymbol{G}_1 = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E}_1)$, $\boldsymbol{V} = \{\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}\ \}$,
$\boldsymbol{E}_1 = \{\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}), (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}), (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}), (\boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}), (\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}), (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g})\ \}$ ここで，次の条件を満たすように，2 部グラフ $\boldsymbol{G}_2 = (\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2, \boldsymbol{E}_2)$ を定義せよ．

（条件）

- $\boldsymbol{G}_1 \subseteq \boldsymbol{G}_2$ かつ $\boldsymbol{G}_2 \subseteq \boldsymbol{G}_1$
- $|\ \boldsymbol{V}_1\ | = 4$
- $|\ \boldsymbol{V}_2\ | = 3$

答

$\boldsymbol{V}_1$ = {

$\boldsymbol{V}_2$ = {

$\boldsymbol{E}_2$ = {

(2-4) 有向グラフ $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$ の無向基礎グラフを図で表せ．
ここで，$\boldsymbol{V} = \{\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}\ \}$, $\boldsymbol{E} = \{\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}), (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}), (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})\ \}$ とする．

離散数学･演習問題　　　学籍番号:　　　氏名:　　　得点:

問 3. グラフの頂点や辺の並びについて各問いに答えよ.

※ 隣接する頂点とその間の辺の系列 $\boldsymbol{W} = (\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{v}_k)$ (ただし, $(\boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{e}_i) \in \boldsymbol{E}$, $1 \leq \boldsymbol{i} \leq \boldsymbol{k}$)を**ウォーク**といい, ここで $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ が全て異なる $\boldsymbol{W}$ を**トレイル**といい, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ が全て異なり, かつ, $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が全て異なる $\boldsymbol{W}$ を**パス**ということにする.

(1) 完全グラフ $\boldsymbol{K}_6$ において, $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{K}_6) = \{ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f} \}$ であるとする. 頂点 $\boldsymbol{a}$ から頂点 $\boldsymbol{f}$ までのパスを $\boldsymbol{P}$ とする.

(1-1) $\boldsymbol{K}_6$ を図で表せ.

(1-2) $\boldsymbol{P}$ の長さが 2 のとき, $\boldsymbol{P}$ は何通りあるか.

(1-3) $\boldsymbol{P}$ の長さが 3 のとき, $\boldsymbol{P}$ は何通りあるか.

(1-4) $\boldsymbol{P}$ の長さが 4 のとき, $\boldsymbol{P}$ は何通りあるか.

(1-5) $\boldsymbol{P}$ の長さが 5 のとき, $\boldsymbol{P}$ は何通りあるか.

(1-6) $\boldsymbol{P}$ の長さが 6 のとき, $\boldsymbol{P}$ は何通りあるか.

(2) 無向グラフ $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$, $\boldsymbol{V} = \{ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e} \}$, $\boldsymbol{E} = \{ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}), (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}), (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}), (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}), (\boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}) \}$ とする.

(2-1) グラフ $\boldsymbol{G}$ を図で表せ.

(2-2) オイラー･トレイル $\boldsymbol{W}_1$ を示せ. ただし, 複数通り $\boldsymbol{W}_1$ が存在する場合, 始点のアルファベットが abc 順で最も小さいものを答えること.

(2-3) ハミルトン閉路 $\boldsymbol{W}_2$ を示せ. ただし, 複数通り $\boldsymbol{W}_2$ が存在する場合, 始点のアルファベットが abc 順で最も小さいものを答えること.

(3) 有向グラフ $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$, $\boldsymbol{V} = \{ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \}$, $\boldsymbol{E} = \{ (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}), (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}), (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) \}$ とする.

(3-1) $\boldsymbol{G}$ は連結といえるか？

(3-2) $\boldsymbol{G}$ は強連結といえるか？

問 4. 行列によるグラフの記述

※ 無向グラフの接続行列の $\boldsymbol{i}$ 行 $\boldsymbol{j}$ 列目の要素は, 頂点 $\boldsymbol{v}_i$ が辺 $\boldsymbol{j}$ の端点であるとき 1 となりそうでないとき 0 となるものとする. 無向グラフの隣接行列の $\boldsymbol{i}$ 行 $\boldsymbol{j}$ 列目の要素は, 頂点 $\boldsymbol{v}_i$ と頂点 $\boldsymbol{v}_j$ を結ぶ辺が存在するとき 1 となり, そうでないとき 0 となるものとする.

無向グラフ $\boldsymbol{G}_1$ は, $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{G}_1) = \{ \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_5, \boldsymbol{v}_6 \}$ であり, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{G}_1) = \{ (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{e}_1), (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{e}_2), (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{e}_3), (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_5, \boldsymbol{e}_4), (\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_6, \boldsymbol{e}_5), (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_5, \boldsymbol{e}_6), (\boldsymbol{v}_5, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{e}_7), (\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{e}_8), (\boldsymbol{v}_5, \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{e}_9) \}$ であるとする.

(1) $\boldsymbol{G}_1$ の隣接行列 $\boldsymbol{A}$ を示せ.

(2) $\boldsymbol{G}_1$ の接続行列 $\boldsymbol{I}$ を示せ.

(3) 隣接行列の $\boldsymbol{t}$ 乗を求め, $\boldsymbol{i}$ 行 $\boldsymbol{j}$ 列目の要素を参照すると, $\boldsymbol{v}_i$ から $\boldsymbol{v}_j$ への長さ $\boldsymbol{t}$ のウォークの総数が分かる.

(3-1) $\boldsymbol{G}_1$ の隣接行列の 2 乗を示せ.

(3-2) $\boldsymbol{v}_1$ を始点とし, $\boldsymbol{v}_5$ を終点とする長さ 4 以下のウォークは何通り存在するか？