－ 離散数学・補足資料② －

集合論

2011.6 徳久雅人

1 集合とその記法

集合(set)とは,「モノの集まり」である. 集まったものを 1 つのものとして扱うために, 集合という考え方が作られた. 集合を表すために, 大文字のアルファベットがよく用いられる. 集合に集められたモノのことを**要素**あるいは**元**(element)という. 要素を表すために, 小文字のアルファベットがよく用いられる. 要素 $\boldsymbol{x}$ が集合 $\boldsymbol{X}$ の要素であることを, $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{X}$ と書く. 要素 $\boldsymbol{y}$ が集合 $\boldsymbol{X}$ の要素でないことを, $\boldsymbol{y}\notin\boldsymbol{X}$ と書く.

集合を定義するには, 次の 2 つの方法がある.

- 外延的定義(列挙式定義):要素を中括弧の中に列挙する.
  例. $\boldsymbol{N} = \{\ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\ \}$
- 内包的定義(条件による定義):要素の一般形と条件で定義する.
  例. $\boldsymbol{N} = \{\ \boldsymbol{n} \mid \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{Z}, 0 \le \boldsymbol{n} \le 9\ \}$ ここで $\boldsymbol{Z}$ を整数の集合とする

集合には 0 個以上の要素が含まれている. 集合に含まれる要素の個数は, 濃度あるいは基数という. 集合 $\boldsymbol{X}$ の要素数は, $|\boldsymbol{X}|$と書く. 有限個の要素からなる集合を**有限集合**という. 無限個の要素からなる集合を**無限集合**という. 要素数が 0 個の集合を**空集合**といい, ϕ, $\emptyset$, $\{\ \}$ という 3 通りの書き方がある.

問 1

(1) 1 から 10 までの整数のうち, 偶数だけを集めた集合 A を, 外延的定義と内包的定義の 2 通りで定義せよ.

(2) 素数の集合 P を定義せよ.

2 集合演算

2.1 いろいろな演算

全体集合: 要素の全体を表す集合を**全体集合**あるいは**普遍集合**という.

部分集合: 2 つの集合 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ について, $\boldsymbol{A}$ が $\boldsymbol{B}$ の部分集合であることを $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$ と書き, 次のように定義する.

$$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}\ (\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}\ )$$

ここで, 集合 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ はそれぞれ全体集合 $\boldsymbol{X}$ の部分集合であるものとする.

ベキ集合: 集合 $\boldsymbol{A}$ の部分集合の集合を, $\boldsymbol{A}$ のベキ集合と呼び, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})$または $2^{\boldsymbol{A}}$ と書く.

等号: 2 つの集合 A, B が等しいことを, A = B と書き, 次のように定義する.

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{A} \supseteq \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$$

不等号: 2 つの集合 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ が等しくないことを, $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B}$ と書き, 次のように定義する.

$$\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \neg\ (\ \boldsymbol{A} \supseteq \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}\ )$$

真部分集合: 2 つの集合 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ について, $\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{B}$ の部分集合であるが, 等しくないことを $\boldsymbol{A}$ は

$\boldsymbol{B}$ の真部分集合であると言い，$\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$ と書き，次のように定義する．

$$\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B}$$

和集合：2 つの集合 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の和集合であることを，$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ と書き，次のように定義する．

$$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \{\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}\ \}$$

ここで，集合 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ はそれぞれ全体集合 $\boldsymbol{X}$ の部分集合であるものとする．

積集合：2 つの集合 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の積集合であることを，$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$ と書き，次のように定義する．

$$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \{\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}\ \}$$

ここで，集合 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ はそれぞれ全体集合 $\boldsymbol{X}$ の部分集合であるものとする．

補集合：集合 $\boldsymbol{A}$ の補集合であることを，$\boldsymbol{A}^c$ と書き，次のように定義する．

$$\boldsymbol{A}^c \Leftrightarrow \{\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{A}\ \}$$

ここで，集合 $\boldsymbol{X}$ は全体集合であるものとする．

差集合：2 つの集合 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ についての差集合を，$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ と書き，次のように定義する．

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \{\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{B}\ \}$$

ここで，集合 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ はそれぞれ全体集合 $\boldsymbol{X}$ の部分集合であるものとする．

直和：2 つの集合 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の直和を，$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ と書き，次のように定義する．

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \{\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}, \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \phi\ \}$$

ここで，集合 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ はそれぞれ全体集合 $\boldsymbol{X}$ の部分集合であるものとする．

直和は，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ が「**互いに素な集合**」（つまり，$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \phi$ であること）である場合のみ成立する演算である．逆に，ある集合 $\boldsymbol{C}$ を複数の互いに素な集合の直和で表すことを，直和分割という．このことを $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_1 + \boldsymbol{C}_2 + \ldots + \boldsymbol{C}_n$ と書き，$\boldsymbol{C}_i$ をブロックという($\boldsymbol{i} = 1,2,\ldots,\boldsymbol{n}$)．

排他的論理和の集合：2 つの集合 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ の排他的論理和の集合であることを，$\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B}$ と書き，次のように定義する．

$$\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{B} \Leftrightarrow (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A})$$

2.2 集合演算の性質

2.2.1 部分集合の性質

① 反射性：$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{A}$

② 反・対称性：$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$

③ 推移性：$(\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}) \wedge (\boldsymbol{B} \subseteq \boldsymbol{C}) \rightarrow \boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{C}$

2.2.2 和集合，積集合，補集合の性質

① ベキ等律：$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$

② 交換律：$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{A}$

③ 結合律：$\boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cup \boldsymbol{C}, \quad \boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{C}$

④ 分配律：$\boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{B} \cap \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) \cap (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{C}), \quad \boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{B} \cup \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) \cup (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{C})$

⑤ 吸収律：$\boldsymbol{A} \cup (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}$

⑥ 復元律：$(\boldsymbol{A}^c)^c = \boldsymbol{A}$

⑦ ド・モルガンの法則：$(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})^c = \boldsymbol{A}^c \cap \boldsymbol{B}^c, \quad (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})^c = \boldsymbol{A}^c \cup \boldsymbol{B}^c$

3 関数

3.1 関数の記法

関数とは，ある範囲のものをある範囲のものに対応付けることである．対応付けられる元の範囲を**定義域**という．対応付けの先の範囲を**値域**という．関数を f，定義域を X， 値域を Y とすると，X と Y は集合であり，次のように幾通りかの記述ができる．

① $f : X \longrightarrow Y$

② $X \xrightarrow{f} Y$

③ $f : a \mapsto b$

④ $b = f(a)$

⑤ f は X から Y への関数である

ここで，$a \in X$， $b \in Y$ とし，a を**変数値**，b を**関数値**という．

関数の定義は，一般式で定義する他に，**関数表**で定義することもできる．

① $f(x) = 2x + 1$

② $f = \begin{pmatrix} 山田 & 鈴木 & 小松 & 杉野 \\ 書記 & 会長 & 会計 & 書記 \end{pmatrix}$

ここで，②について，定義域は{山田，鈴木，小松，杉野} であり，値域は {書記，会長，会計} である．さらに，f(山田) = 書記 である．

2 つの関数を合わせて 1 つの関数を作ることができる．この作られた関数を**合成関数**という．

$f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ の合成関数を $g \circ f$ と書く． $g \circ f(x) = g(f(x))$ である．

問 2

関数 g を役職に対する報酬を表す関数とする．具体的には，g(会長) =100，g(会計) = 80，g(書記) = 50 とする．

(1) g の関数表を示せ．

(2) 合成関数により，「鈴木」の報酬を計算する式を示せ．

3.2 関数の性質

単射： 次の条件を満たす関数 f は，単射であるという．

$f(a) = f(b) \to a = b$

変数値と関数値が 1 対 1 で対応していることを表す．

全射： 次の条件を満たす関数 f は，全射であるという．

$f : X \to Y$

$(\forall y \in Y)(\exists x \in X)\ f(x) = y$

値域の全ての要素が関数値になりうることを表す．

全単射： 全射かつ単射の性質を持つ関数を全単射であるという．

3.3 特別な関数

恒等関数：次の条件を満たす関数を恒等関数という.

$f : X \to X$

$f(x) = x$

また，$f = I_X$ と書く.

逆関数：逆関数について次の定理が存在する.

$f : X \to Y$ が全単射であるならば，

$f \circ g = I_Y$, $g \circ f = I_X$ となる関数 $g : Y \to X$ がただ 1 つ存在し，g を f の逆関数という.

また，逆も言える.

g が f の逆関数であるならば，f は全単射である.

g が f の逆関数であることを $g=f^{-1}$ と書く.

4 関係

4.1 直積

複数の要素を 1 つにまとめたものを**組み**あるいは**順序対**という. たとえば，(グー， チョキ) は，グーという要素とチョキという要素の組みである. これは，(チョキ， グー) という組みとは異なる. つまり，要素を並べる順序に意味があるので，順序対といわれる. 要素が 2 つのときは，**2 つ組み**，**2 項組**，あるいは**ペア**という. 要素が n 個のときは，n 項組という.

直積とは，n 個の集合から n 項組を要素とする集合を作るという集合演算である. 2 つの集合 X,Y の直積は，$X \times Y$ と書き，次のとおりに定義する.

$X \times Y = \{ (x, y) \mid x \in X, y \in Y \}$

たとえば，$X = \{ a, b, c \}$, $Y = \{ 1, 2, 3 \}$ の場合，$X \times Y = \{ (a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3), (c,1), (c,2), (c,3) \}$ となる.

さらに，n 個の集合 X_1, X_2, ..., X_n の直積は，$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ と書き，その要素は，$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ となる. ここで，直積の要素ということは，$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ と記述する.

同一の集合の直積は，次のように略記できる.

$A \times A \times A = A^3$

4.2 関係の表記

関係とは，要素と要素の間の関係のことである. 直積では，要素と要素の組を全ての通りを集合にしていたが，そのうち意味のある，すなわち，関係のある組だけを集合にしたものを関係という. つまり，関係とは，直積の部分集合である.

たとえば，ジャンケンの手の集合 J とは，$J = \{$ グー, チョキ, パー $\}$ である. ジャンケンをする人 A 者と B 者がジャンケンをするときの前通りの手は，$J \times J$ の直積で表され，9 通りある. このうち，アイコの手は 3 通りある. アイコという意味のある関係なので，この 3 通りを $R = \{$ (グー, グー), (チョキ, チョキ), (パー, パー) $\}$ という集合で書くと，R は関係である. $J \times J$ と R はの要素を考えると，$R \subseteq J \times J$ であり，R は直積 $J \times J$ の部分集合であることが分かる.

「等しい」や「大きい」という比較は，２つの要素の比較が基本である．２つ組みの関係を扱うことは，基本的なことであり，**2 項関係**という. 要素 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ についての 2 項関係 $\boldsymbol{R}$ は，$\boldsymbol{a\ R\ b}$ と書く. これは $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \boldsymbol{R}$ と同値である. なお，$\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{X}$ に限らず，$\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ でも良い.

2 項関係を具体的に定義する際，**関係行列**が使用されることがある. 直積 $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y}$ における関係 $\boldsymbol{R}$ について，$\boldsymbol{X} = \{ x_1, x_2, \ldots, x_m \}$, $\boldsymbol{Y} = \{ y_1, y_2, \ldots, y_n \}$ という集合であれば，$\boldsymbol{R}$ は次のような $\boldsymbol{m}$ 行 $\boldsymbol{n}$ 列の行列 $\boldsymbol{M_R}$ で表すことができる.

$$\boldsymbol{M_R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \ldots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \ldots & r_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{ここで，} \quad r_{ij} = \begin{cases} 0 & (x_i, y_j) \notin \boldsymbol{R} \text{ のとき} \\ 1 & (x_i, y_j) \in \boldsymbol{R} \text{ のとき} \end{cases}$$

2 項関係 $\boldsymbol{R}$ の順序対を逆順にしたものを逆関係といい，$\boldsymbol{R}^{-1}$ と書く. これは次のように定義する.

$$\boldsymbol{a\ R^{-1}\ b = b\ R\ a}$$

4.3 関係の性質

集合 $\boldsymbol{X}$ に関する 2 項関係 $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{X}^2$ については，次の性質が議論される.

① 反射性 ... $\forall \boldsymbol{x}\,(\ \boldsymbol{x\ R\ x}\ )$
② 対称性 ... $\boldsymbol{x\ R\ y} \rightarrow \boldsymbol{y\ R\ x}$
③ 反・対称性 ... $\boldsymbol{x\ R\ y} \wedge \boldsymbol{y\ R\ x} \rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$
④ 推移性 ... $\boldsymbol{x\ R\ y} \wedge \boldsymbol{y\ R\ z} \rightarrow \boldsymbol{x\ R\ z}$
⑤ 比較可能性 ... $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X}\,(\ \boldsymbol{x\ R\ y} \vee \boldsymbol{y\ R\ x}\ )$

上記の性質は，全ての関係においていえるものではない. たとえば，ジャンケンのアイコの場合，反射性，対称性，反・対称性，推移性はいえるが，比較可能性はいえない.

推移性に関して，**推移閉包** $\boldsymbol{R}^*$という用語がある. 推移閉包とは，関係 $\boldsymbol{R}$ の要素のうち，推移性により関係付けられる組を全て抽出したものであり，次のように定義される.

$\boldsymbol{R}^* = \{ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mid$ ある $\boldsymbol{n} \geq 1$ および $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \boldsymbol{X}$ が存在し，次の関係を満たす
(1) $\boldsymbol{x} = x_0, \boldsymbol{y} = x_n$
(2) $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n) \in \boldsymbol{R}\ \}$

4.4 順序関係

順序関係とは，集合 $\boldsymbol{X}$ に関する 2 項関係 $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{X}^2$ のうち，反射性，反・対称性，推移性を満たす関係のことである．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{X}^2$ とするとき，「$\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ より $\boldsymbol{R}$ の意味で大きい」ことを，$\boldsymbol{a} \leq_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{b}$ と書く. 順序関係は，集合 $\boldsymbol{X}$ と関係 $\boldsymbol{R}$ で定義されるので，これらの組 $(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{R})$ を**順序集合**という.

順序関係は，次の 2 種類がある.

- **全順序関係**：比較可能性を満たす順序関係
- **半順序関係**：比較可能性を満たさない順序関係

たとえば，整数の集合 $\boldsymbol{N}$ と数学の不等号 “ ≤ ”による順序集合 $(\boldsymbol{N}, \leq)$ は全順序関係である. 一方，トーナメント試合での勝ち負けの関係は半順序関係であり，一部の 2 者間は優劣が不明である.

順序集合（$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{R}$）に関する用語を示す．ここで，$\boldsymbol{U}$ は，$(\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{X}) \wedge (\boldsymbol{U} \neq \phi)$ とする．

$\boldsymbol{U}$ の**上界**：$\{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} \mid \forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{U} (\boldsymbol{y} \leq_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{x}) \}$

$\boldsymbol{U}$ の**下界**：$\{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} \mid \forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{U} (\boldsymbol{x} \leq_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{y}) \}$

$\boldsymbol{U}$ の**最大元**：$\{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U} \mid \forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{U} (\boldsymbol{y} \leq_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{x}) \}$

$\boldsymbol{U}$ の**最小元**：$\{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U} \mid \forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{U} (\boldsymbol{x} \leq_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{y}) \}$

$\boldsymbol{U}$ の**極大元**：$\{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U} \mid \forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X} (\boldsymbol{x} \leq_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{y} \wedge \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y} \to \boldsymbol{y} \notin \boldsymbol{U}) \}$

$\boldsymbol{U}$ の**極小元**：$\{ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U} \mid \forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X} (\boldsymbol{y} \leq_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y} \to \boldsymbol{y} \notin \boldsymbol{U}) \}$

$\boldsymbol{U}$ の**上限**：$\boldsymbol{U}$ の最小上界，すなわち，「$\boldsymbol{U}$ の上界(集合)」の最小元

$\boldsymbol{U}$ の**下限**：$\boldsymbol{U}$ の最大下界，すなわち，「$\boldsymbol{U}$ の下界(集合)」の最大元

4.5 同値関係

同値関係とは，集合 $\boldsymbol{X}$ に関する 2 項関係 $\boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{X}^2$ のうち，反射性，対称性，推移性を満たす関係のことである．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{X}, \boldsymbol{R} \subseteq \boldsymbol{X}^2$ とするとき，「$\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}$ より $\boldsymbol{R}$ の意味で同値である」ことを，$\boldsymbol{a} \sim_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{b}$ と書く．

集合 $\boldsymbol{X}$ の要素と $\boldsymbol{R}$ の意味で同値である要素の集合は**同値類**という．これを$[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{R}}$ と書き，次のように定義する．

$[\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{R}} = \{ \boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X}, \boldsymbol{y} \sim_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{x} \}$

集合 $\boldsymbol{X}$ における同値関係 $\boldsymbol{R}$ による同値類の集合を $\boldsymbol{X}/\boldsymbol{R}$ と書き，次のように定義する．

$\boldsymbol{X}/\boldsymbol{R} = \{ [\boldsymbol{x}]_{\boldsymbol{R}} \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X} \}$

ここで，集合を作るとき，要素が重複する場合は捨てられることを覚えておこう．