# 離散数学･練習問題

学籍番号:　　　　　　　　氏名:　　　　　　　　得点:

**問 1. 集合の記述**　$\boldsymbol{Z}$ を整数の集合とする。1 以上、20 以下の整数の集合を $\boldsymbol{A}$ とする。集合 $\boldsymbol{B}$= { 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 } とする。次の問いに答えよ。

(1) $\boldsymbol{A}$ の外延的定義を示せ。

$A$ = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 }

(2) $\boldsymbol{B}$ の内包的定義を示せ。

$B = \{ 2^n \mid 0 \le n \le 6, n \in Z \}$

(3) $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ の積集合を表す式を書き、その要素を列挙せよ。

$A \cap B$ = { 1, 2, 4, 8, 16 }

(4) 全体集合を $\boldsymbol{Z}$ とするとき、$A^c \cap B$ を求めよ。

$A^c \cap B$ = { 32, 64 }

**問 2. 関数の記述**　小学生から高校生までの学年の集合を $\boldsymbol{G}$= {小 1, 小 2, 小 3, 小 4, 小 5, 小 6, 中 1, 中 2, 中 3, 高 1, 高 2, 高 3 } とする。金額の集合を $\boldsymbol{F}$ とする。すなわち、$\boldsymbol{F}$ = {$\boldsymbol{n}$ 円 | $\boldsymbol{n}$ は整数}である。関数 $\boldsymbol{f}$ は、学年に対応して、ある施設の入場料を表すものとする。次の問いに答えよ。

(1) $\boldsymbol{f}$ と $\boldsymbol{G}$ と $\boldsymbol{F}$ の関係を形式的に示せ。

$f: G \to F$

(2) 小学生は 0 円、中学生は 300 円、高校生は 450 円とするとき、関数 $\boldsymbol{f}$ を示せ。

$f$ =

| 小 1 | 小 2 | 小 3 | 小 4 | 小 5 | 小 6 | 中 1 | 中 2 | 中 3 | 高 1 | 高 2 | 高 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 円 | 0 円 | 0 円 | 0 円 | 0 円 | 0 円 | 300 円 | 300 円 | 300 円 | 450 円 | 450 円 | 450 円 |

(3) 名前と学年の対応を記した名簿がある。これを関数 $\boldsymbol{g}$ とする。すなわち、$g: N \to G$ である。ここで、$\boldsymbol{N}$ は名前の集合である。「太郎」と「花子」の入場料の合計を、関数 $\boldsymbol{f}$ と $\boldsymbol{g}$ の関数を用いて表せ。

$f(g($太郎$)) + f(g($花子$))$

**問 3. 関係の記述**　集合 $\boldsymbol{J}$ = {ロック, シザーズ, ダイナマイト} とする。ロックはシザーズより強く、シザーズはダイナマイトより強く、ダイナマイトはロックより強いものとする。$\boldsymbol{a}$ が $\boldsymbol{b}$ より強い関係を $\boldsymbol{V}$ とし、$(a, b) \in V$ する。次の問いに答えよ。

(1) 直積 $J \times J$ を具体的に示せ。

$J \times J$ = {(ロック,ロック), (ロック,シザーズ), (ロック,ダイナマイト),
(シザーズ,ロック), (シザーズ,シザーズ), (シザーズ,ダイナマイト),
(ダイナマイト,ロック), (ダイナマイト,シザーズ), (ダイナマイト,ダイナマイト)}

(2) $\boldsymbol{V}$ の外延的定義を示せ。

$V$ = {(ロック,シザーズ), (シザーズ,ダイナマイト), (ダイナマイト, ロック)}

(3) $a, b, c \in J$ とする。$\boldsymbol{a}$ が $\boldsymbol{b}$ より強く、かつ、$\boldsymbol{a}$ が $\boldsymbol{c}$ より強いときにだけ、$\boldsymbol{a}$ が $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ より強いこととし、この関係 $\boldsymbol{W}$ の要素は、$(a, b, c)$ とする。$\boldsymbol{W}$ の内包的定義を示せ。

$W = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in J, (a, b) \in V, (a, c) \in V\}$ など

**問 4. 論理式の標準形**　次の論理式を、基本論理式の数を最小とする連言標準形もしくは選言標準形に変形せよ。なお、真理値は **T** と **F** とする。

(1) $P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$

(2) $(P \vee Q) \to R \Leftrightarrow \neg(P \vee Q) \vee R$
$\Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q) \vee R$

(3) $(\neg P \wedge Q) \vee \neg P \Leftrightarrow \neg P$

(3) $(P \wedge Q) \vee (Q \wedge R) \vee P \vee Q$
$\Leftrightarrow \{(P \wedge Q) \vee P\} \vee \{(Q \wedge R) \vee Q\}$
$\Leftrightarrow P \vee Q$

(5) $\neg\{(P \to Q) \vee (Q \wedge R)\} \to (\neg Q \to R)$
$\Leftrightarrow \{(\neg P \vee Q) \vee (Q \wedge R)\} \vee (Q \vee R)$
$\Leftrightarrow [\neg P \vee \{Q \vee (Q \wedge R)\}] \vee Q \vee R$
$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \vee Q \vee R$
$\Leftrightarrow \neg P \vee Q \vee R$

**問 5. 決定問題**　次の論理式が、恒真であるか、恒偽であるか、もしくは、恒真ではないが充足可能であるかについて、答えよ。

(1) $(A \to B) \vee (B \to A)$ を、意味の木により判定せよ。

$A$　　$\neg A$

$(T \to B) \vee (B \to T)$　　$(F \to B) \vee (B \to F)$
$\Leftrightarrow B \vee (B \to T)$　　$\Leftrightarrow T \vee (B \to F)$

$B$　$\neg B$　　$\Leftrightarrow T$

$T \vee (T \to T)$　　$F \vee (F \to T)$
$\Leftrightarrow T$　　$\Leftrightarrow F \vee T$
$\Leftrightarrow T$

恒真である

(2) $P \to (Q \to P)$ を意味の木により判定せよ。

$P$　　$\neg P$

$T \to (Q \to T)$　　$F \to (Q \to F)$
$\Leftrightarrow Q \to T$　　$\Leftrightarrow T$

$Q$　$\neg Q$

$T \to T$　　$F \to T$
$\Leftrightarrow T$　　$\Leftrightarrow T$

恒真である

**問 6. 代数系の分類**　空欄を埋めて、用語を正しく説明せよ。

集合 $\boldsymbol{X}$ と2項演算子 $op$ による代数系 ($X$; $op$) について、半群、モノイド、群、可換半群、可換モノイド、可換群という分類を行う際、《 1 》$\boxed{\text{(a)}}$律、《 2 》$\boxed{\text{(b)}}$の存在、《 3 》$\boxed{\text{(c)}}$の存在、および、《 4 》$\boxed{\text{(d)}}$律の性質が問われる。たとえば、2 行 2 列の正方行列の積による代数系は、《 1 》と《 2 》の性質はあるが、《 3 》と《 4 》の性質は無いので、$\boxed{\text{(e)}}$という分類となる。

(a) 結合　(b) 単位元　(c) 逆元　(d) 交換　(e) モノイド

**問 7. ブール代数**　次の真理値表($x_i$ により $y$ が定まる)に対する最も簡単な加法標準形の式を示せ。

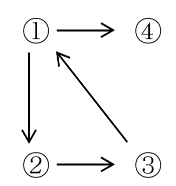
| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

| $x_1x_2$ \ $x_3$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 |
| 01 | 1 | 0 |
| 11 | 1 | 1 |
| 10 | 1 | 1 |

(答) $y = x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3}$

**問 8. グラフの解釈と経路**

(1) 次の有向グラフ $\boldsymbol{G}$ を、集合を用いて、形式的に記述せよ。




(答) $G = (V, E)$
$V$ = { 1, 2, 3, 4 }
$E$ = { (1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 1) }

(2) オイラー･トレイルやハミルトン･パスが存在すれば、それぞれの例を示せ。なお、ウォークは、頂点の $\boldsymbol{n}$ 項組で表せ。

オイラー･トレイル:　(1, 2, 3, 1, 4)
ハミルトン･パス:　(2, 3, 1, 4)

(3) このグラフの隣接行列 $\boldsymbol{A}$ を示せ。隣接行列の $\boldsymbol{i}$ 行 $\boldsymbol{j}$ 列目の要素 $a_{ij}$ は、頂点 $\boldsymbol{i}$ から頂点 $\boldsymbol{j}$ への有向辺が存在するならば 1 とし、存在しなければ 0 とする。

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$