離散数学・演習問題　　　　学籍番号:　　　　　　　　　　　　　氏名:　　　　　　　　　　　　　　　　得点:

問 1. グラフの記述

(1) 次の図のグラフを，集合の形式で記述せよ．なお，無向辺は 2 つ組で記述すること．

(a) $G_1 = (V_1, E_1)$

$V_1 = \{\ a, b, c, d\ \}$

$E_1 = \{\ (a, b), (c, b), (d, b)\ \}$

(b) $G_2 = (V_2, E_2)$

$V_2 = \{\ a, b, c\ \}$

$E_2 = \{\ (a, b), (b, c), (c, c)\ \}$

(c) $G_3 = (V_3, C_3, E_3)$

$V_3 = \{\ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\ \}$

$C_3 = \{\ e_1, e_2, e_3, e_4\ \}$

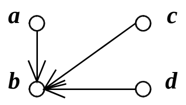
$E_3 = \{\ (v_1, v_4, e_1), (v_2, v_3, e_2), (v_4, v_5, e_3), (v_4, v_5, e_4)\ \}$

(d) $G_4 = (V_4, C_4, E_4)$

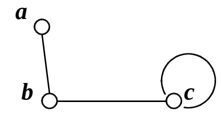
$V_4 = \{\ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\ \}$

$C_4 = \{\ e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\ \}$

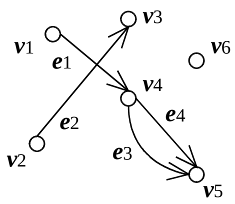
$E_4 = \{\ (v_2, v_7, e_1), (v_2, v_3, e_2), (v_3, v_4, e_3), (v_4, v_5, e_4), (v_1, v_5, e_5), (v_1, v_2, e_6), (v_5, v_6, e_7), (v_6, v_7, e_8)\ \}$



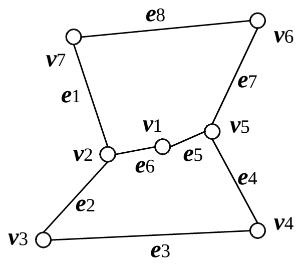
(a) グラフ G_1



(b) グラフ G_2



(c) グラフ G_3



(d) グラフ G_4

図 1 問 1 のグラフ

(2) 図 1 の G_3 の辺についての始点を表す関数 ∂^+の関数表を示せ．

$$\partial^+ = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ v_1 & v_2 & v_4 & v_4 \end{pmatrix}$$

(3) 図 1 の G_4 の辺についての端点を表す関数を ∂ とする．以下を求めよ．

(3-1) $\partial(e_1) = (v_2, v_7)$　　　(3-2) $\partial(e_5) = (v_1, v_5)$

(3-3) $\partial(x) = (v_3, v_4)$　のとき $x = e_3$

(4) 図 1 の G_1 から G_4 について以下の計算をせよ．

(4-1) $|\ V(G_1)\ | = 4$　　　(4-2) $\mathbf{deg}^-_{G1}(b) = 3$，$\mathbf{deg}^+_{G1}(b) = 0$

(4-3) $\mathbf{deg}_{G2}(c) = 3$　　　(4-4) $\displaystyle\sum_{v \in V(G_2)} \mathbf{deg}_{G2}(v) = 1 + 2 + 3 = 6$

(4-5) $C(G)$ はグラフ G の標識集合を表す．以下を計算せよ．

$E(G_3) \cap (\ \{v_2, v_3, v_4, v_5\} \times \{v_4, v_5, v_6\} \times C(G_3)\ )$

$= \{\ (v_4, v_5, e_3), (v_4, v_5, e_4)\ \}$

(4-6) $\displaystyle\sum_{v \in \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_7\}} \mathbf{deg}_{G4}(v) = 2 + 3 + 2 + 3 + 2 = 12$

(4-7) $A = \{\ v \mid \mathbf{deg}_{G4}(v) = 2n,\ n \in Z\ \}$, $B = \{\ v \mid \mathbf{deg}_{G4}(v) = 2n + 1,\ n \in Z\ \}$ とする．ここで，Z は整数の集合である．集合 A と B を具体的に示せ．

$A = \{\ v_1, v_3, v_4, v_6, v_7\ \}$

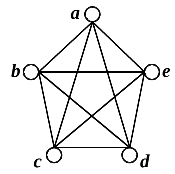
$B = \{\ v_2, v_5\ \}$

問 2. いろいろなグラフ

(1) 下記のグラフの種類名を次の選択肢(a)～(e)で答えよ．ただし，各選択肢は 1 回だけ使うことにする．

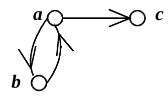
選択肢 (a) 有向グラフ (b) 無向グラフ (c) 標識付きグラフ (d) 多重グラフ (e) 完全グラフ

(1-1)



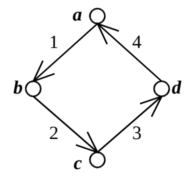
答　(e)

(1-2)



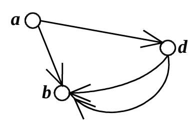
答　(a)

(1-3)



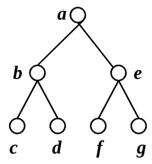
答　(c)

(1-4)



答　(d)

(1-5)



答　(b)

(1-2) は閉路を含むが輪は無いので，(d)ではない．

(2) グラフの演算をせよ．

(2-1) $G_1 = (V_1, E_1)$, $V_1 = \{\ a, b, c, d, e\ \}$, $E_1 = \{\ (a, b), (b, c), (c, d), (d, e), (e, a)\ \}$, $G_2 = (V_2, E_2)$, $V_2 = \{\ a, b, d, e, f\ \}$, $E_2 = \{\ (a, b), (d, b), (d, a), (d, e), (e, f)\ \}$ とする．$G_1 \cap G_2 = G_3$ とするとき，G_3 の頂点集合および辺集合を述べよ．

$V(G_3) = \{\ a, b, d, e\ \}$

$E(G_3) = \{\ (a, b), (d, e)\ \}$

(2-2) $G_1 = (V_1, E_1)$, $V_1 = \{\ b, c, d, e, f\ \}$, $E_1 = \{\ (b, c), (b, f), (c, d), (d, f), (e, f)\ \}$, $G_2 = (V_2, E_2)$, $V_2 = \{\ a, b, d, e, f, g\ \}$, $E_2 = \{\ (a, b), (e, a), (e, f), (g, d), (g, e)\ \}$ とする．$G_1 \cup G_2 = G_3$ とするとき，G_3 の頂点集合および辺集合を述べよ．

$V(G_3) = \{\ a, b, c, d, e, f, g\ \}$

$E(G_3) = \{\ (a, b), (b, c), (b, f), (c, d), (d, f), (e, a), (e, f), (g, d), (g, e)\ \}$

※ この問題は，頂点集合に不足ありという出題ミスだったので，得点にカウントしません．

(2-3) 無向グラフ G_1 を次のように定義する．$G_1 = (V, E_1)$, $V = \{\ a, b, c, d, e, f, g\ \}$, $E_1 = \{\ (a, c), (b, c), (b, d), (d, e), (e, f), (f, g)\ \}$ ここで，次の条件を満たすように，2 部グラフ $G_2 = (V_1, V_2, E_2)$ を定義せよ．

(条件)

- $G_1 \subseteq G_2$ かつ $G_2 \subseteq G_1$
- $|\ V_1\ | = 4$
- $|\ V_2\ | = 3$

答

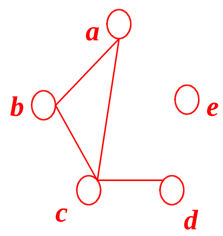
$V_1 = \{\ a, b, e, g\ \}$

$V_2 = \{\ c, d, f\ \}$

$E_2 = \{\ (a, c), (b, c), (b, d), (d, e), (e, f), (f, g)\ \}$

(2-4) 有向グラフ $G = (V, E)$ の無向基礎グラフを図で表せ．

ここで，$V = \{\ a, b, c, d, e\ \}$, $E = \{\ (a, b), (a, c), (b, c), (c, d)\ \}$ とする．

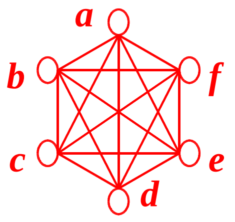


問 3. グラフの頂点や辺の並びについて各問いに答えよ.

※ 隣接する頂点とその間の辺の系列 $\boldsymbol{W} = (\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{v}_k)$（ただし, $(\boldsymbol{v}_{i-1}, \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{e}_i) \in \boldsymbol{E}$, $1 \le \boldsymbol{i} \le \boldsymbol{k}$）を**ウォーク**といい, ここで $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ が全て異なる $\boldsymbol{W}$ を**トレイル**といい, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k$ が全て異なり, かつ, $\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ が全て異なる $\boldsymbol{W}$ を**パス**ということにする. **標識無しグラフのウオークは $\boldsymbol{W} = (\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k)$ と書く.**

(1) 完全グラフ $\boldsymbol{K}_6$ において, $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{K}_6) = \{ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f} \}$ であるとする. 頂点 $\boldsymbol{a}$ から頂点 $\boldsymbol{f}$ までのパスを $\boldsymbol{P}$ とする.

(1-1) $\boldsymbol{K}_6$ を図で表せ.



(1-2) $\boldsymbol{P}$ の長さが 2 のとき, $\boldsymbol{P}$ は何通りあるか.

4 通り　（*経由する点が b, c, d, e の 4 通りだから*）

(1-3) $\boldsymbol{P}$ の長さが 3 のとき, $\boldsymbol{P}$ は何通りあるか.

12 通り　（*2 点を経由する際, 経由する1つ目の点が 4 通りあり, 次の点がそれを除く 3 通りだから*）

(1-4) $\boldsymbol{P}$ の長さが 4 のとき, $\boldsymbol{P}$ は何通りあるか.

24 通り

(1-5) $\boldsymbol{P}$ の長さが 5 のとき, $\boldsymbol{P}$ は何通りあるか.

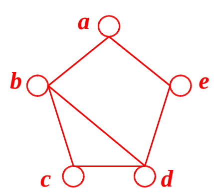
24 通り

(1-6) $\boldsymbol{P}$ の長さが 6 のとき, $\boldsymbol{P}$ は何通りあるか.

0 通り. 条件を満たすパスは無い.

(2) 無向グラフ $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$, $\boldsymbol{V} = \{ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e} \}$, $\boldsymbol{E} = \{ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}), (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}), (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}), (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}), (\boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}) \}$ とする.

(2-1) グラフ $\boldsymbol{G}$ を図で表せ.



(2-2) オイラー･トレイル $\boldsymbol{W}_1$ を示せ. ただし, 複数通り $\boldsymbol{W}_1$ が存在する場合, 始点のアルファベットが abc 順で最も小さいものを答えること.

$\boldsymbol{W}_1 = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d})$ など　※ *標識無しグラフなので辺の記述は不要*

(2-3) ハミルトン閉路 $\boldsymbol{W}_2$ を示せ. ただし, 複数通り $\boldsymbol{W}_2$ が存在する場合, 始点のアルファベットが abc 順で最も小さいものを答えること.

$\boldsymbol{W}_2 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{a})$ など　※ *標識無しグラフなので辺の記述は不要*

(3) 有向グラフ $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$, $\boldsymbol{V} = \{ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \}$, $\boldsymbol{E} = \{ (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}), (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}), (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) \}$ とする.

(3-1) $\boldsymbol{G}$ は連結といえるか？

いえる

(3-2) $\boldsymbol{G}$ は強連結といえるか？

いえない

問 4. 行列によるグラフの記述

※ 無向グラフの接続行列の $\boldsymbol{i}$ 行 $\boldsymbol{j}$ 列目の要素は, 頂点 $\boldsymbol{v}_i$ が辺 $\boldsymbol{j}$ の端点であるとき 1 となりそうでないとき 0 となるものとする. 無向グラフの隣接行列の $\boldsymbol{i}$ 行 $\boldsymbol{j}$ 列目の要素は, 頂点 $\boldsymbol{v}_i$ と頂点 $\boldsymbol{v}_j$ を結ぶ辺が存在するとき 1 となり, そうでないとき 0 となるものとする.

無向グラフ $\boldsymbol{G}_1$ は, $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{G}_1) = \{ \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_5, \boldsymbol{v}_6 \}$ であり, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{G}_1) = \{ (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{e}_1), (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{e}_2), (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{e}_3), (\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_5, \boldsymbol{e}_4), (\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_6, \boldsymbol{e}_5), (\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_5, \boldsymbol{e}_6), (\boldsymbol{v}_5, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{e}_7), (\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{e}_8), (\boldsymbol{v}_5, \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{e}_9) \}$ であるとする.

(1) $\boldsymbol{G}_1$ の隣接行列 $\boldsymbol{A}$ を示せ.

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(2) $\boldsymbol{G}_1$ の接続行列 $\boldsymbol{I}$ を示せ.

$$\boldsymbol{I} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(3) 隣接行列の $\boldsymbol{t}$ 乗を求め, $\boldsymbol{i}$ 行 $\boldsymbol{j}$ 列目の要素を参照すると, $\boldsymbol{v}_i$ から $\boldsymbol{v}_j$ への長さ $\boldsymbol{t}$ のウォークの総数が分かる.

(3-1) $\boldsymbol{G}_1$ の隣接行列の 2 乗を示せ.

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(3-2) $\boldsymbol{v}_1$ を始点とし, $\boldsymbol{v}_5$ を終点とする長さ 4 以下のウォークは何通り存在するか？

$$\boldsymbol{A}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & 9 & \\ & & 9 & \\ \text{-----} & & 7 & : \\ & & 10 & : \\ & & 8 & \\ & & 2 & \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & & & : & & \\ & & & : & & \\ & & & : & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 9 & \\ & 9 & \\ \text{-----} & 7 & : \\ & 10 & : \\ & 8 & \\ & 2 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 27 & \\ \text{-----} & : & : \\ & : & : \\ & : & \end{pmatrix}$$

1 + 2 + 9 + 27 = 39 [通り]

（参考）

問 1．集合でグラフを描くとは，まず，$\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{E})$, または，$\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{E})$ と書いておき，次に，$\boldsymbol{V}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{E}$ の具体的な要素を列挙する．

標識無し無向グラフの辺集合は，2 つの方法がある．特に断りが無い場合，どちらの方法で記述できる．しかし，本演習では，2 つ組を使うように指定しているので，2 つ組で記述するべきである．

【2 つ組を列挙する方法】 $\boldsymbol{E} = \{ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}), (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}), \ldots \}$ のように 2 つ組を列挙する．$\boldsymbol{E} \subseteq \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V}$ の意味である．授業ではこの方法を採用した．

【集合を列挙する方法】$\boldsymbol{E} = \{ \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}, \{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}, \ldots \}$のように集合を列挙する．$\boldsymbol{E} \subseteq \{ \boldsymbol{e} \mid 1 \leq |\boldsymbol{e}| \leq 2, \boldsymbol{e} \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{V}(\boldsymbol{G})) \}$ の意味である．ここで，$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X})$は集合 $\boldsymbol{X}$ のベキ集合を表す．頂点 a に接続する輪の場合，$\{ \boldsymbol{a} \}$と書く．

問 1(4-3)．1 つの輪だけが接続する頂点の次数は，2 である．この問いの場合，さらに，1 つの辺が接続するので，次数は 3 となる．

問 1(4-5)．$\boldsymbol{V}=\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}, \boldsymbol{C}=\{1, 2\}$ のとき，3 つの直積とは $\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{C} = \{ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, 1), (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}, 2), (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, 1), (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, 2), (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, 1), (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, 2), (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}, 1), (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}, 2)\}$ となる．途中式を書く際に，直積の結果を具体的に列挙する必要はない．積集合 $\cap$ があるので，共通する辺を検討づけ，そして直接，答えを書く．

問 2(2-3)．2 部グラフにおいて辺が $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ であるならば，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は異なる頂点集合に属する．

問 3．標識無しグラフの場合のウォークの書き方が説明できていませんでした．採点は甘くしています．