離散数学・演習問題　学籍番号：　　　　　　　　　　氏名：　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　点数：

問 1. 全体集合を $\{ a, b, c, d, e, f, g \}$ とするとき，次の集合を計算せよ．
なお，$P(A)$ は集合 A のベキ集合とし，$|A|$ は集合 A の要素数とする．

(1) $\{ a, b, c \} \cap \{ b, c, d \} = \{ b, c \}$

(2) $\{ a, b, c \} \cup \{ b, c, d \} = \{ a, b, c, d \}$

(3) $\{ a, b, c \}^c \cap \{ b, c, d \}^c = \{ d, e, f, g \} \cap \{ a, e, f, g \}$
$= \{ e, f, g \}$

(4) $(\{ a, b, c \} \cap \{ b, c, d \})^c = (\{ b, c \})^c$
$= \{ a, d, e, f, g \}$

(5) $\{ a, b, c \} \oplus \{ b, c, d \} = \{ a, d \}$

(6) $A = \{ a, b, c \}, B = \{ b, c, d \}$ とする．
$(A \cup B) \cap A = A = \{ a, b, c \}$

(7) $A = \{ a, b, c \}, B = \{ b, c, d \}, C = \{ d, e, f \}$ とする．
$(A \cap B) \cup (B \cap C^c) \cup (B^c \cap C)$
$= \{ b, c \} \cup (B \cap \{ a, b, c, g \}) \cup (\{ a, e, f, g \} \cap C)$
$= \{ b, c \} \cup \{ b, c \} \cup \{ e, f \}$
$= \{ b, c, e, f \}$

(8) $A = \{ a, b, c \}, B = \{ b, c, d \}, C = \{ c, d, e, f \}$ とする．
$(A \cap B \cap C)^c \cup ((A \cap B)^c \cap (A \cap C)^c)$
$= (\{ c \})^c \cup ((\{ b, c \})^c \cap (\{ c \})^c)$
$= (\{ c \})^c \cup (\{ b, c \} \cup \{ c \})^c$
$= (\{ c \} \cap \{ c \})^c$
$= \{ c \}^c$
$= \{a, b, d, e, f, g\}$

(9) $P(\{ a, b, c \})$
$= \{\{ a, b, c \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \{ a \}, \{ b \}, \{ c \}, \{\}\}$

(10) $|\{ a, b, c \}|$
$= 3$

(11) $A = \{ a, b, c \}, B = \{ b, c, d \}$ とする．
$|A \cup B|$
$= |\{ a, b, c, d \}|$
$= 4$

(12) $|P(\{ a, b, c \})|$
$= |\{\{ a, b, c \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \{ a \}, \{ b \}, \{ c \}, \{\}\}|$
$= 8$

(13) $\displaystyle\sum_{S \in P(\{ a, b, c \})} |S|$
$= |\{ a, b, c \}| + |\{ a, b \}| + |\{ a, c \}| + |\{ b, c \}| + |\{ a \}| + |\{ b \}| + |\{ c \}| + |\{\}|$
$= 3 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 0 = 12$

(14) $\{ a, b, c \} \times \{ b, c, d \}$
$= \{ (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (b, c), (b, d), (c, b), (c, c), (c, d) \}$

問 2. ジャンケンの手の集合を $J = \{$ グー, チョキ, パー $\}$ とする．

(1) 2 人でジャンケンをする際，出される手の組の集合を式で表せ．
$J \times J$

(2) 2 人でジャンケンし，a が b に勝つ関係を W とし，$(a, b) \in W$ とする．グーはチョキに勝ち，チョキはパーに勝ち，パーはグーに勝つとする．W の定義を示せ．
$W = \{$ (グー, チョキ), (チョキ, パー), (パー, グー) $\}$

(3) 2 人でジャンケンをする際，アイコの関係 E を表したい．

(3-1) E を外延的定義で表せ．
$E = \{$(グー, グー), (チョキ, チョキ), (パー, パー)$\}$

(3-2) E を内包的定義で表せ．
（複数通りの正解がある）
$E = \{ (a, a) \mid a \in J \}$
$E = \{ (a, b) \in J \times J \mid (a, b) \notin W, (b, a) \notin W\}$ など

(4) グーは 1 歩進み，チョキは 2 歩進み，そして，パーは 5 歩進むことにする．歩数は 0 以上の整数の集合 N とする．こうした手に対する進む歩数を表す関数を f とする．

(4-1) $f : J \to N$ とするとき，f の関数表を示せ．
$$f = \begin{pmatrix} \text{グー} & \text{チョキ} & \text{パー} \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(4-2) f は，「単射，全射，全単射，いずれでもない」のどれになるか述べよ．
f は単射である．

(5) a が b に勝つとき a の手に対する歩数だけ a が進み，a と b がアイコのとき b の手に対する歩数だけ b が進むことにする．
2 人のジャンケンの手の組に対する a の歩数を表す関数を g, 同じく b の歩数を表す関数を h とする．すなわち，$g: J \times J \to N$ であり，$h: J \times J \to N$ である．次に示す g の式を参考に，h の式を作成せよ．ただし，a と b の手をそれぞれ $j_a, j_b \in J$ とする．

$$g(j_a, j_b) = \begin{cases} f(j_a) & (j_a, j_b) \in W \text{ のとき} \\ 0 & (j_a, j_b) \notin W \text{ のとき} \end{cases}$$

$$h(j_a, j_b) = \begin{cases} f(j_b) & (j_a, j_b) \in E \text{ のとき} \\ 0 & (j_a, j_b) \notin E \text{ のとき} \end{cases}$$

(6) 番目 n と a と b によるジャンケンの手の 3 つ組の系列を L とし，
$L = \{ (n, j_a, j_b) \mid n \in N, j_a \in J, j_b \in J \}$ とする．L を入力し，a と b の歩数の差を表す関数 p の式を作成せよ．なお，a の歩数が多い場合を正とする．

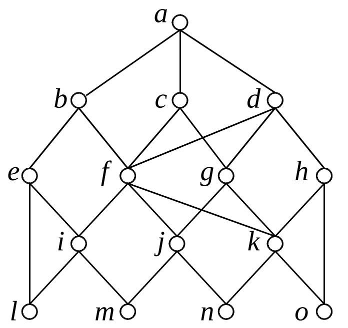
$$p(L) = \sum_{(n, j_a, j_b) \in L} (g(j_a, j_b) - h(j_a, j_b))$$

(7) $L = \{$ (1, グー, チョキ), (2, グー, グー), (3, パー, チョキ), (4, チョキ, パー), (5, パー, パー), (6, グー, グー) $\}$ のとき，$p(L)$ を示せ．

$p(L) = 1 + (-1) + 0 + 2 + (-5) + (-1) = -4$

離散数学・演習問題　学籍番号：　　　　　　　氏名：　　　　　　　　　　　　　　　点数：

問 3．集合 $X = \{ a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o \}$ の半順序関係 R のハッセ図が次のとおりであるとする．順序集合 (X, R) と $U \subseteq X$ について各問に答えよ．



(1) $U = \{ c, f, g \}$ とする．

(1-1) U の上界を述べよ．

$\{ a, c \}$

(1-2) U の下界を述べよ．

$\{ j, k, m, n, o \}$

(1-3) U の最大元を述べよ．

$\{ c \}$

(1-4) U の最小元を述べよ．

$\{ \}$

(1-5) U の極大元を述べよ．

$\{ c \}$

(1-6) U の極小元を述べよ．

$\{ f, g \}$

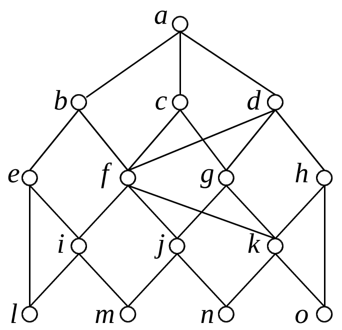
(1-7) U の上限を述べよ．

$\{ c \}$

(1-8) U の下限を述べよ．

$\{ \}$

(2) $U = \{ d, f, g, h, k \}$ とする．



(メモ用)

(2-1) U の上界を述べよ．

$\{ a, d \}$

(2-2) U の下界を述べよ．

$\{ k, n, o \}$

(2-3) U の最大元を述べよ．

$\{ d \}$

(2-4) U の最小元を述べよ．

$\{ k \}$

(2-5) U の極大元を述べよ．

$\{ d \}$

(2-6) U の極小元を述べよ．

$\{ k \}$

(2-7) U の上限を述べよ．

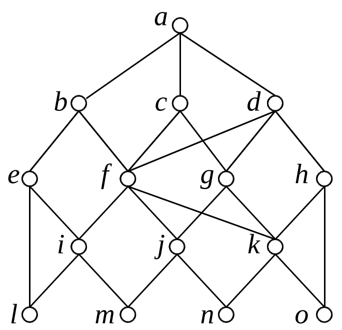
$\{ d \}$

(2-8) U の下限を述べよ．

$\{ k \}$

(3) 次の条件を全て満たす集合 U を求めよ．

(3-1)

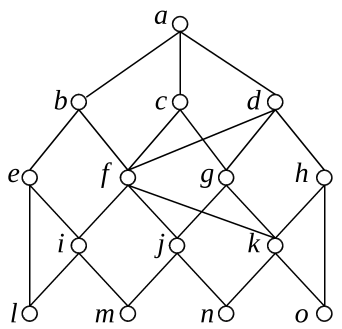


(メモ用)

- $U \subseteq X$
- U の上界は $\{ a, c, d \}$ である．
- U の下界は $\{ n \}$ である．
- U の最大元は無い．
- U の最小元は無い．
- U の極大元は $\{ f, g \}$ である．
- U の極小元は $\{ j, k \}$ である．
- U の上限は無い．
- U の下限は $\{ n \}$ である．

$U = \{ f, g, j, k \}$

(3-2)



(メモ用)

- $U \subseteq X$　　*複数の解あり．*
- $d \notin U$　　*少なくとも 1 つを答えると○*
- $|U| = 4$
- U の上界は $\{ a \}$
- U の下界は $\{ m \}$

$U = \{ b, c, i, j \}, \{ b, c, e, g \}, \{ b, g, i, j \}, \{ b, c, e, j \}, \{ e, g, i, j \}, \ldots$ など全 9 通り

問 4．人のデータベース V を作成したい．データベースの 1 単位は，名前と番号と性別の 3 つ組とする．すなわち，$V \subseteq N \times M \times S$ である．ここで，N は名前の集合 {ミク, リン, レン, ルカ, KAITO, MEIKO}，M は番号の集合 {00, 01, 02, 03, 不明}，S は性別の集合 {男, 女} とする．次の情報を元に V を示せ．

- ミクの番号は 01 である．
- リンは女である．
- リンとレンの番号は同じである．
- KAITO の番号は最も小さい．
- ルカの番号は最も大きい．
- 関数 $g: N \to M$ は，全射であるが，単射でない．
- $|\{ v \mid v \in V, (n, \text{不明}, s) = v, n \in N, s \in S \}| = 1$
- $|V \cap N \times M \times \{\text{女}\}| = 4$
- $|\{ v \mid v \in V, (n, m, \text{男}) = v, n \in N, m \in M, E(m) \}| = 2$

ここで，$E(x)$は，x が偶数の際に真となり，それ以外は偽となる命題関数である．

V = {(ミク, 01, 女), (リン, 02, 女), (レン, 02, 男), (ルカ, 03, 女),
(KAITO, 00, 男), (MEIKO, 不明, 女)}

問 5．文書を表す集合 D は，単語とその出現番目のペアを要素する．単語の集合を W，出現番目（1 以上の整数）の集合を N とすると，$D \subseteq W \times N$ となる．下記の 3 つの原文 i (i = 1,2,3) を全て小文字化して集合にしたものを D_i とする（ピリオドとコンマは無視する．スペース区切りで単語とみなす）．

原文 1: *Nageiredo Hall was built on a cliff at an altitude of 520 meters more than 1300 years ago as a training site for Buddhist monks. It remains a mystery how this building was constructed.*

原文 2: *Tottori is Japan's largest producer and exporter of the Nijisseiki Pear. Large scale orchards are located throughout the prefecture, and in autumn, visitors can pick the choicest fruit and eat it on the spot.*

原文 3: *This museum is dedicated to Tottori's symbolic fruit, the Nijisseiki Pear. Tottori Prefecture produces more of these pears than anywhere else in Japan and has expanded its market overseas.*

※鳥取県観光情報ホームページより引用．出題用に一部変更．

(1) 次の集合演算を計算せよ．

(1-1) $D_1 \cap \{(w, 5) \mid w \in W\}$ = { (*on*, 5) }

(1-2) $D_2 \cap \{(and, n) \mid n \in N\}$ = { (*and*, 6), (*and*, 20), (*and*, 29) }

(1-3) $\{w \mid n \in N, (is, n-1) \in D_3, (w, n) \in D_3\}$ = { *dedicated* }

(2) 次の関数 g はどのような働きがあるか．関数 f を参考に答えよ．

$f : D \to W$

$f(D) = \{ w \in W \mid (w, x) \in D \}$

f は，D に含まれる単語の集合を返す関数である．重複は無視される．

$g : D \times D \to W$

$g(D_a, D_b) = \{ w \in W \mid (w, x) \in D_a, (w, y) \in D_b \}$

g は，D_a と D_b に共通して含まれる単語の集合を返す関数である．

(3) 次の関数の値を示せ．

(3-1) $g(D_1, D_2)$ = { *on*, *of*, *it* }

(3-2) $g(D_1, D_3)$ = { *of*, *more*, *than*, *this* }

(3-3) $g(D_2, D_3)$ = { *tottori*, *is*, *and*, *of*, *the*, *nijisseiki*, *pear*, *prefecture*, *in*, *fruit* }

(4) 関数 d を次のとおり定義するとき，各問の式を計算せよ．小数第 3 位までの概数で示せ．

$d(D_a, D_b) = 2 \, |g(D_a, D_b)| \, / \, (|f(D_a)| + |f(D_b)|)$

(4-1) $d(D_1, D_2) = 2 \cdot 3 / (31 + 29) = 0.1$

(4-2) $d(D_1, D_3) = 2 \cdot 4 / (31 + 29) \approx 0.133$

(4-3) $d(D_2, D_3) = 2 \cdot 10 / (29 + 29) \approx 0.345$

（参考）

問 1(9) について．

$\{ a, b, c \}$の部分集合には，$\{ a, b, c \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \{ a \}, \{ b \}, \{ c \}, \{ \}$ の 8 通りがある．空集合を｛ ｝と書く代わりに，ϕ や $\varnothing$ と書いて良い．しかし，$\{ \phi \}$ は誤りである．$P(A)$ は，集合 A の部分集合を要素とする集合を返す関数なので，上記の 8 つを{ }の中に入れる．( ) の中に入れるのは誤りである．また，集合の要素の間は，コンマで区切ること．

（誤り例）

(ｱ) $\{ a, b, c \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \{ a \}, \{ b \}, \{ c \}, \{ \}$　全体を中括弧で囲っていないので誤り

(ｲ) $\{ \{ a, b, c \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \{ a \}, \{ b \}, \{ c \}, \{ \phi \} \}$　空集合の書き方が誤り

(ｳ) $\{ \{ a, b, c \} \ \{ a, b \} \ \{ a, c \} \ \{ b, c \} \ \{ a \} \ \{ b \} \ \{ c \} \{ \} \}$　コンマが無いので誤り

(ｴ) $(\{ a, b, c \}, \{ a, b \}, \{ a, c \}, \{ b, c \}, \{ a \}, \{ b \}, \{ c \}, \{ \})$　全体を丸括弧で囲っているので誤り

(ｵ) $\{ (a, b, c), (a, b), (a, c), (b, c), (a), (b), (c), () \}$　部分集合とするところを n 項組，すなわち，丸括弧で記載しているので誤り

問 1(13) について．

$\sum$ の使い方に慣れよう．下の添え字に，$S \in P(\{ a, b, c \})$ がある．これは，$P(\{ a, b, c \})$が集合を表しているので，その要素を S に代入して $\sum$ の右の式を計算し，その結果を合計するという意味である．集合の要素数が 8 個なので，S への代入は 8 回行われる．

問 1(14) について．

2 つの集合を直積で計算すると，2 項組を要素とする集合が得られる．たとえば，$\{ a, b \} \times \{ 1, 2 \} = \{ (a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2) \}$ である．要素が n 項組なので，要素は丸括弧で記載することになる．全体的には集合が得られるので，全体を中括弧で囲う．要素の間はコンマで区切る．

問 2(6) について．

集合 L の各要素について，$g(j_a, j_b) - h(j_a, j_b)$ という計算をし，それらの合計を求めたい．問 1(13)の応用で，$\sum$ を使った式を立てよう．L の要素を得る際，$x \in L$ としたのでは，j_a, j_b が得られないので，$(n, j_a, j_b) \in L$ とする．

問 3(3-2) について．

答は複数ある．$\{b, e, i\}$ から 2 つ，$\{c, g, j\}$ から 2 つをそれぞれ抽出し，それらの和集合が 1 つの答である．

$\{b, e\} \cup \{c, g\} = \{ b, c, e, g \}$

$\{b, e\} \cup \{c, j\} = \{ b, c, e, j \}$

$\{b, e\} \cup \{g, j\} = \{ b, e, g, j \}$

$\{b, i\} \cup \{c, g\} = \{ b, c, g, i \}$

$\{b, i\} \cup \{c, j\} = \{ b, c, i, j \}$

$\{b, i\} \cup \{g, j\} = \{ b, g, i, j \}$

$\{e, i\} \cup \{c, g\} = \{ c, e, g, i \}$

$\{e, i\} \cup \{c, j\} = \{ c, e, i, j \}$

$\{e, i\} \cup \{g, j\} = \{ e, g, i, j \}$

ちなみに，答の集合を内包的定義で書くと次のようになる．

$\{ A \mid A = B \cup C, B \in P(\{b, e, i\}), |B| = 2, C \in P(\{c, g, j\}), |C| = 2\}$

問 5 について．

$D_1 = \{ (nageiredo, 1), (hall, 2), (was, 3), (built, 4), (on, 5), (a, 6), (cliff, 7), ... \}$ である．

問 5(1-1)について．

W がいろいろな単語を要素とする集合なので，$\{(w, 5) \mid w \in W\} = \{(a, 5), (ball, 5), (build, 5), ..., (on, 5), ...\}$ となる．D_1 との積集合を求めると，$(on, 5)$ だけが残る．

問 5(2)について．

厳密に言えば，「g は，〜〜の集合を返す関数である．」という言い方にして欲しい．どんな集合かというと，D_a と D_b に共通する単語を要素とする集合である．