離散数学・演習問題　学籍番号：　　　　　　　　　氏名：　　　　　　　　　　　　　　　　点数：

※ 真偽は，T と F と書くことにせよ．

問 1. 記号論理式を簡単な連言標準形にせよ．

(1) $(A \wedge B) \vee A \Leftrightarrow A$

(2) $(A \vee B) \wedge A \Leftrightarrow A$

(3) $(\neg A \wedge B) \vee A \Leftrightarrow (\neg A \vee A) \wedge (B \vee A)$
$\Leftrightarrow T \wedge (B \vee A)$
$\Leftrightarrow A \vee B$

(4) $(\neg A \vee B) \wedge A \Leftrightarrow (\neg A \wedge A) \vee (B \wedge A)$
$\Leftrightarrow F \vee (B \wedge A)$
$\Leftrightarrow A \wedge B$

(5) $(A \wedge B) \vee (A \vee B) \Leftrightarrow \{(A \wedge B) \vee A\} \vee B$
$\Leftrightarrow A \vee B$

(6) $(A \wedge B) \vee A \vee (A \wedge C) \Leftrightarrow \{(A \wedge B) \vee A\} \vee (A \wedge C)$
$\Leftrightarrow A \vee (A \wedge C)$
$\Leftrightarrow A$

(7) $\neg(\neg(A \vee B) \vee (C \wedge D)) \wedge C \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge \neg(C \wedge D)) \wedge C$
$\Leftrightarrow (A \vee B) \wedge \{\neg(C \wedge D) \wedge C\}$
$\Leftrightarrow (A \vee B) \wedge \{(\neg C \vee \neg D) \wedge C\}$
$\Leftrightarrow (A \vee B) \wedge \{(\neg C \wedge C) \vee (\neg D \wedge C)\}$
$\Leftrightarrow (A \vee B) \wedge \{F \vee (\neg D \wedge C)\}$
$\Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (\neg D \wedge C)$
$\Leftrightarrow (A \vee B) \wedge C \wedge \neg D$

(9) $(P \to Q) \Leftrightarrow \neg P \vee Q$

(10) $\neg(P \to \neg Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$
$\Leftrightarrow P \wedge Q$

(11) $(P \to Q) \vee P \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \vee P$
$\Leftrightarrow (\neg P \vee P) \vee Q$
$\Leftrightarrow T \vee Q$
$\Leftrightarrow T$

(12) $(P \to Q) \wedge P \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge P$
$\Leftrightarrow (\neg P \wedge P) \vee (Q \wedge P)$
$\Leftrightarrow F \vee (Q \wedge P)$
$\Leftrightarrow P \wedge Q$

(13) $(P \to Q) \vee Q \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \vee Q$
$\Leftrightarrow \neg P \vee Q$

(14) $(P \to Q) \wedge Q \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge Q$
$\Leftrightarrow Q$

(15) $(P \to \neg Q) \wedge Q \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q) \wedge Q$
$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge Q)$
$\Leftrightarrow (\neg P \wedge Q) \vee F$
$\Leftrightarrow \neg P \wedge Q$

(16) $\{\neg(P \to Q) \vee \neg(P \to R)\} \wedge P$
$\Leftrightarrow \{\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg(\neg P \vee R)\} \wedge P$
$\Leftrightarrow \{(P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge \neg R)\} \wedge P$
$\Leftrightarrow \{(P \wedge \neg Q) \wedge P\} \vee \{(P \wedge \neg R) \wedge P\}$
$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge \neg R)$
$\Leftrightarrow \{(P \wedge \neg Q) \vee P\} \wedge \{(P \wedge \neg Q) \vee \neg R)\}$
$\Leftrightarrow P \wedge \{(P \vee \neg R) \wedge (\neg Q \vee \neg R)\}$
$\Leftrightarrow \{P \wedge (P \vee \neg R)\} \wedge (\neg Q \vee \neg R)$
$\Leftrightarrow P \wedge (\neg Q \vee \neg R)$

(分配律を使うと簡単)
$\Leftrightarrow P \wedge (\neg Q \vee \neg R)$

問 2. 記号論理式の真理値表を作成せよ．

(1) $A \wedge (\neg A \vee B)$

A	B	$\neg A$	$\neg A \vee B$	$A \wedge (\neg A \vee B)$
F	F	T	T	F
F	T	T	T	F
T	F	F	F	F
T	T	F	T	T

(2) $(P \to Q) \wedge (Q \to R)$

P	Q	R	$(P \to Q)$	$(Q \to R)$	$(P \to Q) \wedge (Q \to R)$
F	F	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F
F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F
T	F	T	F	T	F
T	T	F	T	F	F
T	T	T	T	T	T

(3) $(P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge R) \vee (Q \to R)$

P	Q	R	$(P \wedge \neg Q)$	$(P \wedge R)$	$(Q \to R)$	$(P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge R) \vee (Q \to R)$
F	F	F	F	F	T	T
F	F	T	F	F	T	T
F	T	F	F	F	F	F
F	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	T	T
T	F	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	F	F
T	T	T	F	T	T	T

問 3. 意味の木を作成し，論理式が，恒真，恒偽，恒真ではないが充足可能であるかを述べよ．

(1) $\{(A \to B) \wedge (B \to A)\} \leftrightarrow (A \leftrightarrow B)$

A
$\{(T \to B) \wedge (B \to T)\} \leftrightarrow (T \leftrightarrow B)$
$\Leftrightarrow \{B \wedge (B \to T)\} \leftrightarrow (T \leftrightarrow B)$

B
$\{T \wedge (T \to T)\} \leftrightarrow (T \leftrightarrow T)$
$\Leftrightarrow (T \wedge T) \leftrightarrow T$
$\Leftrightarrow T \leftrightarrow T$
$\Leftrightarrow T$

$\neg B$
$\{F \wedge (F \to T)\} \leftrightarrow (T \leftrightarrow F)$
$\Leftrightarrow F \leftrightarrow F$
$\Leftrightarrow T$

$\neg A$
$\{(F \to B) \wedge (B \to F)\} \leftrightarrow (F \leftrightarrow B)$
$\Leftrightarrow \{T \wedge (B \to F)\} \leftrightarrow (F \leftrightarrow B)$
$\Leftrightarrow (B \to F) \leftrightarrow (F \leftrightarrow B)$

B
$(T \to F) \leftrightarrow (F \leftrightarrow T)$
$\Leftrightarrow F \leftrightarrow F$
$\Leftrightarrow T$

$\neg B$
$(F \to F) \leftrightarrow (F \leftrightarrow F)$
$\Leftrightarrow T \leftrightarrow T$
$\Leftrightarrow T$

恒真である

(2) $(A \to B) \wedge (\neg B \to A)$

A
$(T \to B) \wedge (\neg B \to T)$
$\Leftrightarrow B \wedge (\neg B \to T)$

B
$T \wedge (F \to T)$
$\Leftrightarrow T$

$\neg B$
$F \wedge (T \to T)$
$\Leftrightarrow F$

$\neg A$
$(F \to B) \wedge (\neg B \to F)$
$\Leftrightarrow T \wedge (\neg B \to F)$
$\Leftrightarrow (\neg B \to F)$

B
$(F \to T)$
$\Leftrightarrow T$

$\neg B$
$(T \to F)$
$\Leftrightarrow F$

恒真ではないが充足可能である

離散数学・演習問題　学籍番号：　　　　　　　　　　　　氏名：　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　点数：

問 4. 推論図を作成することで，論理式が恒真であることを示せ．

(1) $A \to [(B \to C) \to \{(A \to B) \to C\}]$

$1 \quad 2$

$A \quad A\to B \quad 3$

$B \quad B\to C$

C　$\to$導入 2

$(A\to B)\to C$　$\to$導入 3

$(B\to C)\to\{(A\to B)\to C\}$　$\to$導入 1

$A\to[(B\to C)\to\{(A\to B)\to C\}]$

ゆえに恒真である．

(2) $(A \to B) \to \{(C \to A) \to (C \to B)\}$

$1 \quad 2$

$C \quad C \to A \quad 3$

$A \quad A \to B$

B　$\to$導入 1

$C \to B$　$\to$導入 2

$(C \to A) \to (C \to B)$　$\to$導入 3

$(A \to B)\to \{(C \to A) \to (C \to B)\}$

ゆえに恒真である．

問 5. 集合 $X = \{a, b, c, d\}$ とする．2 項関係 $R_0\ (\subseteq X^2) = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, c), (c, d)\}$ とする．ここで，論理式 $P(x, y) = x\ R_0\ y$ は，x と y が R_0 の関係であるならば真となり，そうでなければ偽となるものとする．さらに，R を R_0 の推移閉包とする．$P(x, y)$ と同様に論理式 $Q(x, y) = x\ R\ y$ とする．

(1) 次の論理式の真偽を述べよ．また，その理由を述べよ．

(1-1) $\forall x\in X\ \forall y\in X\ P(x, y)$

F である．　(理由) たとえば $P(b, a) \Leftrightarrow F$ であるから．

(以下，青字はヒント) F となる例が 1 つでも示せれば良い

(1-2) $\forall x\in X\ \exists y\in X\ P(x, y)$

F である．　(理由) $x = d$ のとき，$P(x, y)$を満たす y が存在しないから．

$x = a$ のとき，b のとき，c のとき，d のときのそれぞれで
T となるような y が存在すればT だが…

(1-3) $\exists x\in X\ \forall y\in X\ P(x, y)$

F である．　(理由) $x = a$ のとき，$P(a, d) \Leftrightarrow F$ であり，$x = b, c, d$ のとき，$P(x, a) \Leftrightarrow F$ である．ゆえに，いかなる x を用いても，全ての y において $P(x, y)$を満たさないから．

x に何か 1 つを代入したとき，それ一つで，どんな y においても T となればT だが…

(1-4) $\exists x\in X\ \exists y\in X\ P(x, y)$

T である．　(理由) たとえば $P(a, b) \Leftrightarrow T$ であるから．

T となる例が 1 つでも示せれば良い

(2) R の外延的定義を示せ．

$R = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d)\}$

(3) 次の論理式の真偽を述べよ．また，その理由を述べよ．

(3-1) $\forall x\in X\ \forall y\in X\ Q(x, y)$

F である．　(理由) たとえば，$Q(b, a) \Leftrightarrow F$ であるから．

(3-2) $\forall x\in X\ \exists y\in X\ Q(x, y)$

F である．　(理由) $x = d$ の際，$Q(x, y)$を満たす y が存在しないから．

(3-3) $\exists x\in X\ \forall y\in X\ Q(x, y)$

T である．　(理由) $x = a$ のとき，全ての y について，$Q(x, y)$ が成り立つから．

(3-4) $\exists x\in X\ \exists y\in X\ Q(x, y)$

T である．　(理由) たとえば，$Q(a, b) \Leftrightarrow$ T であるから．

(4) 次の論理式の真偽を述べよ．また，その理由を述べよ．

(4-1) $\forall y\in X\ (\ Q(a, y) \to P(a, y)\ )$

F である．　(理由) たとえば，$y = d$ の際，与式は F となるから．

(4-2) $\forall y\in X\ (\ Q(b, y) \to P(b, y)\ )$

F である．　(理由) たとえば，$y = d$ の際，与式は F となるから．

(4-3) $\forall x\in X\ \forall y\in X\ (\ Q(x, y) \to P(x, y)\ )$

F である．　(理由) たとえば，$x = a, y = d$ のとき，与式は F となる．

(4-4) $\forall x\in X\ \forall y\in X\ (\ P(x, y) \to Q(x, y)\ )$

T である．

(理由)　$P(x, y) \Leftrightarrow T$ となる (x, y) は，R_0 の要素である．$R_0 \subset R$ であるので，その組 (x, y) において $Q(x, y) \Leftrightarrow T$ となる．一方，$P(x, y) \Leftrightarrow F$ となるとき，$P(x, y) \to Q(x, y) \Leftrightarrow F \to Q(x, y) \Leftrightarrow T$ である．ゆえに，与式は T である．

問 6. 次の事実から，論理的帰結を考えてみよう．

扉が 3 つある．3 つの扉は次のように設計されている．

事実 1: 左の扉が開くならば右の扉が開く．

事実 2: 真ん中の扉が開かないことと右の扉が開かないことは同値である．

事実 3: 金の鍵を使うと左の扉が開く．

事実 4: 銀の鍵を使うと真ん中の扉が開く．

事実 5: 銅の鍵を使っても右の扉は開かない．

(1) 事実 1 から事実 5 を命題論理式で表せ．

左の扉，真ん中の扉，右の扉が開くことをそれぞれ，L, C, R という命題変数で表すことにする．金の鍵，銀の鍵，銅の鍵を使うことをそれぞれ，G, S, B という命題変数で表すことにする．

事実 1: $L \to R$,　事実 2: $\neg C \leftrightarrow \neg R$,　事実 3: $G \to L$, 事実 4: $S \to C$, 事実 5: T

(2) 3 つの扉が閉まっている．その後，次の勇者が開けた扉を述べよ．

(2-1) 金の鍵だけを持っている勇者：

左の扉，真ん中の扉，右の扉

(2-2) 銀の鍵だけを持っている勇者：

真ん中の扉，右の扉

(2-3) 銅の鍵だけを持っている勇者：

なし

（参考）

問 6 の証明

(2-1) a 左の扉が開くのか？

下記の論理式が恒偽ならば，$G \to L$ が論理的帰結により真である．

$(L \to R) \wedge (C \leftrightarrow R) \wedge (G \to L) \wedge (S \to C) \wedge \neg(G \to L)$

波線部分より，恒偽であることが分かるので，$G \to L$ が真といえる．

したがって，金の鍵を持つ勇者は左の扉を開けることができる．

(2-1) b 真ん中の扉が開くのか？

「金の鍵を使うならば真ん中の扉が開く」という命題が真になるかを調べる．

$(L \to R) \wedge (C \leftrightarrow R) \wedge (G \to L) \wedge (S \to C) \wedge \neg(G \to C)$

G:

$(L \to R) \wedge (C \leftrightarrow R) \wedge (T \to L) \wedge (S \to C) \wedge \neg(T \to C)$

$\Leftrightarrow (L \to R) \wedge (C \leftrightarrow R) \wedge L \wedge (S \to C) \wedge \neg C$

- L:

  $(T \to R) \wedge (C \leftrightarrow R) \wedge T \wedge (S \to C) \wedge \neg C$

  $\Leftrightarrow R \wedge (C \leftrightarrow R) \wedge (S \to C) \wedge \neg C$

  - C:

    $R \wedge (T \leftrightarrow R) \wedge (S \to T) \wedge \neg T$

    $\Leftrightarrow R \wedge (T \leftrightarrow R) \wedge (S \to C) \wedge F$

    $\Leftrightarrow F$

  - $\neg C$:

    $R \wedge (F \leftrightarrow R) \wedge (S \to F) \wedge \neg F$

    $\Leftrightarrow R \wedge (F \leftrightarrow R) \wedge \neg S \wedge T$

    $\Leftrightarrow R \wedge (F \leftrightarrow R) \wedge \neg S$

    - R:

      $T \wedge (F \leftrightarrow T) \wedge \neg S$

      $\Leftrightarrow F \wedge \neg S$

      $\Leftrightarrow F$

    - $\neg R$:

      $F \wedge (F \leftrightarrow F) \wedge \neg S$

      $\Leftrightarrow F$

- $\neg L$:

  $(F \to R) \wedge (C \leftrightarrow R) \wedge F \wedge (S \to C) \wedge \neg C$

  $\Leftrightarrow F$

$\neg G$:

$(L \to R) \wedge (C \leftrightarrow R) \wedge (F \to L) \wedge (S \to C) \wedge \neg(F \to C)$

$\Leftrightarrow (L \to R) \wedge (C \leftrightarrow R) \wedge T \wedge (S \to C) \wedge \neg T$

$\Leftrightarrow (L \to R) \wedge (C \leftrightarrow R) \wedge (S \to C) \wedge F$

$\Leftrightarrow F$

同様にして，$G \to R$, $S \to C$, $S \to R$, も証明できるので，自分でやってみよう．

また，$S \to L$ のときは恒偽にならない．つまり，銀の鍵では左の扉は開かない．以下に示す．

$(L \to R) \wedge (C \leftrightarrow R) \wedge (G \to L) \wedge (S \to C) \wedge \neg(S \to L)$

S:

$(L \to R) \wedge (C \leftrightarrow R) \wedge (G \to L) \wedge (T \to C) \wedge \neg(T \to L)$

$\Leftrightarrow (L \to R) \wedge (C \leftrightarrow R) \wedge (G \to L) \wedge C \wedge \neg L$

- L:

  $(T \to R) \wedge (C \leftrightarrow R) \wedge (G \to T) \wedge C \wedge \neg T$

  $\Leftrightarrow R \wedge (C \leftrightarrow R) \wedge T \wedge C \wedge F$

  $\Leftrightarrow F$

- $\neg L$:

  $(F \to R) \wedge (C \leftrightarrow R) \wedge (G \to F) \wedge C \wedge \neg F$

  $\Leftrightarrow T \wedge (C \leftrightarrow R) \wedge \neg G \wedge C \wedge T$

  $\Leftrightarrow (C \leftrightarrow R) \wedge \neg G \wedge C$

  - C:

    $(T \leftrightarrow R) \wedge \neg G \wedge T$

    $\Leftrightarrow (T \leftrightarrow R) \wedge \neg G$

    - R:

      $(T \leftrightarrow T) \wedge \neg G$

      $\Leftrightarrow T \wedge \neg G$

      $\Leftrightarrow \neg G$

      - G: F
      - $\neg G$: T

    - $\neg R$:

      $(T \leftrightarrow F) \wedge \neg G$

      $\Leftrightarrow F \wedge \neg G$

      $\Leftrightarrow F$

  - $\neg C$:

    $(F \leftrightarrow R) \wedge \neg G \wedge F$

    $\Leftrightarrow F$

$\neg S$:

$(L \to R) \wedge (C \leftrightarrow R) \wedge (G \to L) \wedge (F \to C) \wedge \neg(F \to L)$

$\Leftrightarrow (L \to R) \wedge (C \leftrightarrow R) \wedge (G \to L) \wedge T \wedge \neg T$

$\Leftrightarrow (L \to R) \wedge (C \leftrightarrow R) \wedge (G \to L) \wedge F$

$\Leftrightarrow F$

恒真ではないが充足可能．

ゆえに，$S \to L$ は論理的帰結ではない．銀の鍵で左の扉を開くことはできない．