―離散数学･補足資料 ①―

記号論理

2010.5/13 徳久雅人

1 記号論理の導入

記号論理とは，言明を記号で表現した上で，言明の真偽を扱うことである．

言明は，「何かを主張すること」である．たとえば，「2は偶数である」は言明である．言明は，記述方法による違いがある．その違いにより，記号論理は，命題論理，述語論理などに区別される．真偽は，言明が成立するか成立しないかのことである．

1.1 真理値

言明の成立と不成立を表すものを**真理値**（または，**論理値**）という．

本資料では，真理値に「**T**，**F**」を用いる．**T** は，True，真であり，成立を表す．**F** は，False，偽であり，不成立を表す．なお，他の書籍などでは，1 を真，0 を偽とすることがある．

1.2 命題論理

真偽を問うことのできる言明を**命題**という．言明は言葉で書かれることがある．命題論理では，言明を記号で表す．**命題論理**は，命題を用いて真偽を扱うことである．

例 1

以下に示す P, Q, R は，それぞれ命題である．

P = 2 は偶数である

Q = 鳥取大学は鳥取県に有る

R = “1 > 3”

ここで，P と Q は成立するので **T** である．R は不成立なので **F** である．

（終）

言明の中に不確定なものを含むことがある．不確定なものを変数で表すことにする．こうした場合，不確定なものを含むため，真偽が定まらない．つまり，変数を含む言明は，純粋な命題とは言えない．変数を含む言明，および，その記述は，**命題関数**と呼ばれている．

例 2

以下に示す $P(x)$, $Q(x)$, $R(x, y)$ は，それぞれ命題関数である．

$P(x)$ = x は偶数である

$Q(x)$ = x は人間である

$R(x, y)$ = “$x < y$”

（終）

命題関数は，引数に値が代入されてはじめて真偽が問えるものとなる．たとえば，例 2 の命題関数 $P(x)$ は，$x = 10$ ならば真と言える命題として，また，$x = 1$ ならば偽と言える命題として，それぞれ解釈できる．

1.3 述語論理

命題関数は，引数に代入されるものに依存して真偽が解釈される．代入されるものを上手に限定することで，真偽を解釈することはできないだろうか．そこで考え出されたのが述語論理である．

述語論理は，命題関数および限定作用素を用いた論理である．

限定作用素には，全称作用素∀，および，存在作用素∃の2つがある．各意味を表 1 に示す．

表 1 限定作用素の意味

記述	意　味
∀	全称作用素である．ある集合について，全ての要素を変数に代入して解釈する．
∃	存在作用素である．ある集合から，適切な要素を選び，そして，変数に代入して解釈する．

命題関数で引数となっている変数の全てに，限定作用素が付与されると，これは命題と言える．命題関数に全称作用素を付与して得られる命題を，**全称命題**という．命題関数に存在作用素を付与して得られる命題を，**存在命題**（= 特称命題）という．

例 3

以下の記述は，述語論理としての記述である．これらは命題であるので，命題論理と同様に，記号で表すことができる．ただし，$\boldsymbol{B}$ は「鳥大・知能の2年生の集合」，$\boldsymbol{Z}$ は「整数の集合」，であり，命題関数 $P(x)$, $Q(x)$ は例 2 で定義したものとする．

$A = (\exists x \in \boldsymbol{Z})[x$ は偶数である$]$

$B = (\forall x \in \boldsymbol{Z})P(x)$

$C = (\forall x \in \boldsymbol{B})Q(x)$

$D = (\exists x \in \boldsymbol{B})Q(x)$

たとえば，$x = 4$ の場合に“ x は偶数である”が成立するので，A は **T** である．たとえば，$x = 1$ とすると $P(x)$ が不成立となるので，全ての整数 x について $P(x)$が成立する訳ではない．したがって，B は **F** である．C と D は両方とも **T** である．

（終）

変数が複数存在する場合は，限定作用素の付く変数の出現順序に注意しなければならない．たとえば，「$\forall x \exists y$ 」という場合には，「 x が如何なる要素であれ，適切に y に要素を代入して解釈する」というように考える．「$\exists y \forall x$ 」という場合には，「ある y を想定したときには，x の全ての要素を代入して（成立するかどうかを）解釈する」というように考える．

例 4

次の命題について，真理値を述べよ．ただし，$\boldsymbol{Z}$ は「整数の集合」であり，$x,y \in \boldsymbol{Z}$ とする．そして，$R(x, y)$は例 2 で定義した命題関数とする．

$A = (\exists x \exists y)R(x, y)$

$B = (\exists x \forall y)R(x, y)$

$C = (\forall x \exists y)R(x, y)$

$D = (\forall x \forall y)R(x, y)$

A は **T** である．B は **F** である．C は **T** である．D は **F** である．

（終）

1.4 命題結合記号

命題を結合する記号のことを**命題結合記号**という．主なものを表 2 にまとめる．

表 2 主な命題結合記号

記号	意　味
$\wedge$	論理積(and),「かつ」である. 結合される2つの命題の真理値がともに **T** であるならば **T** となり, そうでなければ **F** となる.
$\vee$	論理和(or),「または」である. 結合される2つの命題の真理値に少なくとも1つが **T** であるならば **T** となり, そうでなければ **F** となる.
$\neg$	否定(not)である. 付与される命題の真理値が **T** であるならば **F** となり, **F** であるならば **T** となる.
$\rightarrow$ (または $\Rightarrow$)	含意(imply),「ならば」である. 条件部の命題が **T** であり帰結部の命題が **F** であるならば **F** となり, そうでなければ **T** となる.
$\leftrightarrow$	同値(equivalent),「同値」である. 2つの命題の真理値が等しい.
$\oplus$	排他的論理和(exclusive　or),「不一致」である. 結合される2つの命題の真理値がどちらか一方のみ **T** であるならば **T** となり, そうでなければ **F** となる.

命題結合記号の解釈を助けるために, **真理値表**が使用される. 表 3 に一覧表を示す.

表 3 真理値表

(a) 論理積

P	Q	$P \wedge Q$
F	**F**	**F**
F	**T**	**F**
T	**F**	**F**
T	**T**	**T**

(b) 論理和

P	Q	$P \vee Q$
F	**F**	**F**
F	**T**	**T**
T	**F**	**T**
T	**T**	**T**

(c) 否定

P	$\neg P$
F	**T**
T	**F**

(d) 含意

P	Q	$P \rightarrow Q$
F	**F**	**T**
F	**T**	**T**
T	**F**	**F**
T	**T**	**T**

(e) 同値

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
F	**F**	**T**
F	**T**	**F**
T	**F**	**F**
T	**T**	**T**

(f) 排他的論理和

P	Q	$P \oplus Q$
F	**F**	**F**
F	**T**	**T**
T	**F**	**T**
T	**T**	**F**

1.5 論理式

1.5.1 定義

以下を満たす式を論理式という.

- 命題 $P, Q, R, \ldots$ は論理式である.
- P が論理式であるとき, $\neg P$ も論理式である.
- P, Q が論理式であるとき, $P \rightarrow Q$ も論理式である.

(終)

ここで, 命題結合記号で作られた式, とりわけ, 論理積, 論理和, 排他的論理和による式が, 論理式なのか, と疑問が出るだろう. これらによる式も論理式であるのは, 次の関係から確認できる.

$P \wedge Q = \neg (P \rightarrow \neg Q)$

$P \vee Q = \neg P \rightarrow Q$

$P \oplus Q = (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)$

これらの関係が正しいかどうかは, 真理値表を作成することで確認できる.

逆に，含意については，次の関係がある．

$P \to Q = \neg P \vee Q$

1.5.2 論理式の計算に使われる同値な関係

含意と論理和の関係の他に，論理式の計算によく使われる同値な関係がある．

表 4 同値な関係

#	関　係		性 質
1	$P \vee Q = Q \vee P$,	$P \wedge Q = Q \wedge P$	交換律
2	$P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$,	$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	分配律
3	$P \vee (P \wedge Q) = P$	$P \wedge (P \vee Q) = P$	吸収律
4	$P \vee P \vee P \vee \ldots \vee P = P$	$P \wedge P \wedge P \wedge \ldots \wedge P = P$	ベキ等律
5	$(P \vee Q) \vee R = P \vee (Q \vee R)$,	$(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R)$	結合律
6	$\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$,	$\neg(P \wedge Q) = \neg P \vee \neg Q$	ド・モルガンの法則
7	$\neg\neg P = P$		二重否定
8	$P \vee \neg P = \mathbf{T}$		排中律
9	$P \wedge \neg P = \mathbf{F}$		矛盾律
10	$\mathbf{T} \vee Q = \mathbf{T}$, $\quad \mathbf{F} \vee Q = Q$	$\mathbf{T} \wedge Q = Q$, $\quad \mathbf{F} \wedge Q = \mathbf{F}$	真偽の性質
11	$P \to Q = \neg P \vee Q = \neg(P \wedge \neg Q)$		含意の除去
12	$\mathbf{T} \to Q = Q$, $\quad \mathbf{F} \to Q = \mathbf{T}$,	$P \to \mathbf{T} = \mathbf{T}$, $\quad P \to \mathbf{F} = \neg P$	含意の性質
13	$P \to \neg P = \neg P$		背理法
14	$P \to Q = \neg Q \to \neg P$		対偶
15	$P \leftrightarrow Q = (P \to Q) \wedge (Q \to P) = (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$		同値の除去
16	$P \leftrightarrow Q = \neg P \leftrightarrow \neg Q$,	$\neg(P \leftrightarrow Q) = (\neg P \leftrightarrow \neg Q)$	同値の性質

※ 何と何が同値な関係かを分かりやすくするため，あえて，同値 $\leftrightarrow$ を ＝ と記載した．

同値な関係を証明する方法は2つある．1つは，既に証明されている同値な関係を用いて，式の一部を置き換えることにより目的の式を導くことである．もう1つは，真理値表を作成することである．

練習

表 4 の「14.対偶」を2通りの方法で証明せよ．

（終）

1.6 小まとめ

本章では，記号論理の導入として，真理値，命題論理，述語論理，命題結合記号，および，論理式をそれぞれ基本的なレベルで説明した．

次章以降では，「形式的な論理」を説明した後で，「モデル理論」を説明する．実は，本章の最後の練習で示したことは，これらにほぼ対応する．「形式的な論理」では，「公理と演繹規則から定理を証明する」ということを行う．「モデル理論」では，「論理式の真偽を決めるために，それを構成する論理式の真偽を問う」ということを行う．

参考文献

[1] 長尾真, 淵一博: 論理と意味, 岩波講座, 情報科学, Vol.7, 岩波書店, 1983.

[2] 前原昭二: 記号論理入門, 日本評論社, 1967.