複素関数論

2009 年 7 月 27 日

1 極座標表現

以下の複素数を極座標表現せよ。

$$1 - i$$

2 コーシ・リーマンの方程式

次の関数を考える。

$$f(z) = 2z^2 + 3z$$

A. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ として 実部 $u(x, y)$, 虚部 $v(x, y)$ を求めよ。

B. コーシ・リーマンの方程式

$\partial u/\partial x = \partial v/\partial y, \partial v/\partial x = -\partial u/\partial y$

から、$f(z)$ が正則であることを示せ。

C. $f'(z)$ を求めよ

3 ド・ロピタルの公式

ド・ロピタルの公式を利用して，次の極限値を求めよ。

$$\lim_{z \to 0} \frac{1 - e^z}{z}$$

4 線積分

z=0,z=1,z=1+i を頂点とする三角形の辺を、それぞれ C_1, C_2, C_3 とする (図 1)．それぞれの複素積分をもとめよ。

$\int_{C_1} zdz, \int_{C_2} zdz, \int_{C_3} zdz$

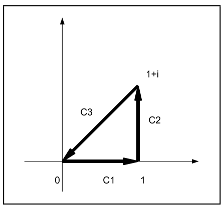

図 1: 積分路

5 留数

次の複素関数のずべての，零点と位数，極と位数と留数を求めよ。

$$\frac{z^2}{(3z - 2)(z + 1)^2}$$

6 複素積分

次の周回積分を求めよ．なお，積分路は原点を中心とする半径 2 の円を正の向きに積分したとする．

$$\oint_C \frac{e^z}{z + 1} dz$$

7 定積分

次の定積分を求めよ。

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^4 + 1)} dx$$

8 ローラン展開

次の複素を考える．

$$f(z) = \frac{1}{z(1 - z)}$$

A. z = 0 を中心とするローラン展開を求めよ。

B. このときの収束半径を求めよ．

C. z = 0 における留数を求めよ。

9 感想

授業の感想をのべよ。