複素関数

1　極座標表現

以下の複素数を極座標表現せよ．(5)
$i+1$
(回答)

$$i+1=\sqrt{2}(\cos\frac{1}{4}\pi+i\sin\frac{1}{4}\pi)$$
$$=\sqrt{2}e^{\frac{1}{4}\pi i+2n\pi i}$$
$$\text{ただし}\ (n=0,1,2,\ldots)$$

2　複素積分

次の周回積分を求めよ．なお，積分路は原点を中心とする半径 6 の円を正の向きに積分したとする．(5)

$$\oint_C \frac{\cos z}{(z-i)(z-3i)}dz$$

(回答)
$z=i,3i$ のとき 1 位の極をもち、さらにオイラーの公式[1]，および，留数定理より

$$Res[i]=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{\cos z}{(z-i)(z-3i)}$$
$$=\lim_{z\to i}\frac{\cos z}{z-3i}$$
$$=-\frac{\cos i}{2i}$$
$$=\frac{e+e^{-1}}{4}i$$

$$Res[3i]=\lim_{z\to 3i}(z-3i)\frac{\cos z}{(z-i)(z-3i)}$$
$$=\lim_{z\to 3i}\frac{\cos z}{z-i}$$
$$=\frac{\cos 3i}{2i}$$
$$=-\frac{e^3+e^{-3}}{4}i$$

以上より

$$f(z)=2\pi i(Res[i]+Res[3i])$$
$$=2\pi i(\frac{e+e^{-1}}{4}i-\frac{e^3+e^{-3}}{4}i)$$
$$=\frac{\pi(e^3+e^{-3}-e-e^{-1})}{2}$$

[1] オイラーの公式：$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

3 テーラ展開

収束半径を示しながら，次の関数のテーラ展開を求めよ．

A．$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ の $z=0$ を中心

(回答)

$$f(z)=-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-2}$$

$$=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2}(\frac{1}{1-\frac{z}{2}})$$

$$=(1+z+z^2+\ldots)-\frac{1}{2}\{1+(\frac{z}{2})+(\frac{z}{2})^2\ldots\}$$

以上より $f(z)$ のテーラ展開は以下の通りである．

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\{1-(\frac{1}{2})^{n+1}\}z^n$$

4 ローラン展開

収束半径を示しながら，次の関数のローラン展開を求めよ．また，それぞれの式の各特異点の留数を求めよ．

A．$f(z)=\frac{1}{z(1-z)}$ の $z=0$ を中心

(回答)

まず $f(z)=\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{1-z}$ と変形出来る．

<u>(1)$|z|<1$ の時</u>

$$f(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{1-z}$$

$$=\frac{1}{z}+1+z+z^2+\ldots$$

以上より $f(z)$ のローラン展開は以下の通りである．

$$f(z)=\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n$$

$$=\sum_{n=-1}^{\infty}z^n$$

よって $Resf(0)=1$ 収束半径は 1

<u>(2)$|z|>1$ のとき</u>

$$f(z)=\frac{1}{z}-\frac{1}{z}(\frac{1}{1-\frac{1}{z}})$$

$$=\frac{1}{z}-\frac{1}{z}\{1+\frac{1}{z}+(\frac{1}{z})^2+\ldots\}$$

以上より $f(z)$ のローラン展開は以下の通りである．

$$f(z)=\frac{1}{z}\{1-\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{z})^n\}$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}$$

B. $f(z)=\frac{z^2}{(z-1)(z-2)}$ の $z=1$ を中心
(回答)

まず $f(z)=(1-\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{4}{z-2})$ と変形出来る.

(1)$|z-1|<1$ の時

$$f(z)=1-\frac{1}{z-1}-\frac{4}{1-(z-1)}$$

$$=1-\frac{1}{z-1}-4\{1+(z-1)+(z-1)^2+(z-1)^3+\dots\}$$

以上より $f(z)$ のローラン展開は以下の通りである.

$$f(z)=-3-\frac{1}{z-1}-4\sum_{n=1}^{\infty}(z-1)^n$$

よって $Resf(1)=-1$ 収束半径は 1
(2)$|z-1|>1$ のとき

$$f(z)=(1-\frac{1}{z-1}+\frac{4}{z-2})$$

$$=1-\frac{1}{z-1}+\frac{\frac{4}{z-1}}{1-\frac{1}{z-1}}$$

$$=1-\frac{1}{z-1}+\frac{4}{z-1}(1+\frac{1}{(z-1)}+\frac{1}{(z-2)^2}-\dots)$$

以上より $f(z)$ のローラン展開は以下の通りである.

$$f(z)=1+\frac{3}{z-1}+4\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^n}$$

C. $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ の $z=2$ を中心
(回答)

まず $f(z)=(1+\dfrac{4}{z-2}-\dfrac{1}{z-1})$ と変形出来る.

(1)$|z-2|<1$ の時

$$f(z)=1+\frac{4}{z-2}-\frac{1}{1+(z-2)}$$

$$=1+\frac{4}{z-2}-\{1-(z-2)+(z-2)^2-(z-2)^3+\dots\}$$

以上より $f(z)$ のローラン展開は以下の通りである.

$$f(z)=\frac{4}{z-2}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n$$

よって $Resf(2)=4$ 収束半径は 1
(2)$|z-2|>1$ のとき

$$f(z)=(1+\frac{4}{z-2}-\frac{1}{z-1})$$

$$=1+\frac{4}{z-2}-\frac{\frac{1}{z-2}}{1+\frac{1}{z-2}}$$

$$=1+\frac{4}{z-2}-\frac{1}{z-2}(1-\frac{1}{(z-2)}+\frac{1}{(z-2)^2}-\dots)$$

以上より $f(z)$ のローラン展開は以下の通りである.

$$f(z)=1+\frac{3}{z-2}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-2)^n}$$

(別回答)

まず $f(z)=z^2(\frac{-1}{z-1}+\frac{1}{z-2})$ と変形出来る.

(1)$|z-2|<1$ の時

$$f(z)=\{(z-2)^2+4z-4\}\{\frac{1}{z-2}-\frac{1}{1+(z-2)}\}$$

$$=\{(z-2)^2+4(z-2)+4\}\{\frac{1}{z-2}-1+(z-2)-(z-2)^2+(z-2)^3+\dots\}$$

以上より $f(z)$ のローラン展開は以下の通りである.

$$f(z)=\{(z-2)^2+4(z-2)+4\}\{\frac{1}{z-2}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n\}$$

ここで $z=2$ の留数は

$$Res[2]=\lim_{z\to 2}\frac{z^2}{z-1}=4 \text{ である}$$

また収束半径は 1 である.

(2)$|z-2|>1$ のとき

$$f(z)=\{(z-2)^2+4z-4\}\{\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-2}\frac{1}{1+\frac{1}{z-2}}\}$$

$$=\{(z-2)^2+4z-4\}\{\frac{1}{z-2}-\frac{1}{z-2}(1-\frac{1}{z-2}+\frac{1}{(z-2)^2}-\dots)\}$$

以上より $f(z)$ のローラン展開は以下の通りである.

$$f(z)=\{(z-2)^2+4(z-2)+4\}\{\frac{1}{z-2}(1-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{1}{z-2})^n)\}$$